



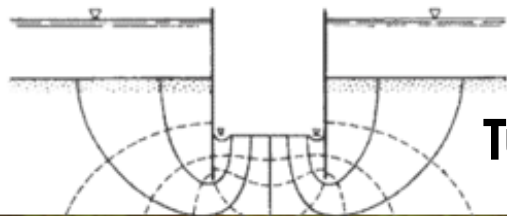
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA  
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Datos autor /Teléfono: +51965281663  
Correo Electrónico: [jose.huayanay@unsch.edu.pe](mailto:jose.huayanay@unsch.edu.pe)  
DOI: <https://doi.org/10.0000/villautomation.lib07>

# FISICA II-FS283- ING CIVIL-UNI01

DEPÓSITO LEGAL: 202603221

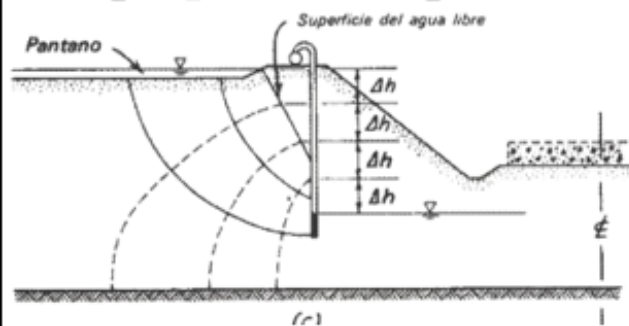
ISSN: 3119-7957 (En línea)



Tutor: FIS. ING. JOSE LUIS HUAYANAY

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ ,  $f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$

$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$ ,  $g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$ ,  $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$



Ayacucho-Perú  
2026

Porque Jehová da la sabiduría, y de su boca viene el conocimiento y la inteligencia Prov.2:6 a Configuraci



Centro Nacional  
ISSN - Perú



Activar Win  
a Configuraci





## Índice general

I	Parte Uno	
<b>1</b>	<b>Elasticidad y Análisis Vectorial del Esfuerzo</b>	<b>9</b>
1.1	Introducción	9
1.2	Fuerza como Vector	10
1.2.1	Descomposición de Fuerzas	10
1.3	Ley de Hooke	10
1.4	Esfuerzo (Stress)	10
1.5	Deformación (Strain)	10
1.6	Esfuerzo en Forma Vectorial	11
1.7	Deformación (Strain)	11
1.8	Relación Esfuerzo-Deformación	11
1.9	Demostración de la Relación	11
1.10	Tipos de Esfuerzo desde el Enfoque Vectorial	12
1.10.1	Esfuerzo Normal	12
1.10.2	Esfuerzo Cortante	12
1.11	Deformación	13
1.11.1	Deformación Longitudinal	13
1.11.2	Deformación Vectorial	13
1.12	Elasticidad y Plasticidad	13
1.12.1	Régimen Elástico	13
1.12.2	Régimen Plástico	13

<b>1.13</b>	<b>Ley de Hooke (Forma Vectorial)</b>	<b>13</b>
<b>1.14</b>	<b>Módulos de Elasticidad</b>	<b>13</b>
1.14.1	Módulo de Young	13
1.14.2	Módulo de Corte	13
1.14.3	Módulo Volumétrico	13
<b>1.15</b>	<b>Coefficiente de Poisson</b>	<b>13</b>
<b>1.16</b>	<b>Aplicación en Ingeniería</b>	<b>14</b>
1.16.1	Carga inclinada en una barra	14
<b>1.17</b>	<b>Ejemplo 1: Proyección de esfuerzo</b>	<b>14</b>
<b>1.18</b>	<b>Ejemplo en Scilab</b>	<b>14</b>
<b>1.19</b>	<b>Cinemática del continuo</b>	<b>14</b>
<b>1.20</b>	<b>Tensor de esfuerzos</b>	<b>15</b>
<b>1.21</b>	<b>Ecuaciones de equilibrio</b>	<b>15</b>
<b>1.22</b>	<b>Ley de Hooke generalizada</b>	<b>15</b>
<b>1.23</b>	<b>Compatibilidad</b>	<b>15</b>
<b>1.24</b>	<b>Energía de deformación</b>	<b>16</b>
<b>1.25</b>	<b>Principio de mínima energía</b>	<b>16</b>
<b>1.26</b>	<b>Ecuaciones de Navier</b>	<b>16</b>
<b>1.27</b>	<b>Ejemplo avanzado: barra 1D</b>	<b>16</b>
<b>1.28</b>	<b>Simulación en Scilab</b>	<b>16</b>
1.28.1	Campo de deformación 1D	16
1.28.2	Solución numérica tipo FEM (simplificado)	17
1.28.3	Visualización de campo de desplazamiento	17
<b>1.29</b>	<b>Aplicaciones avanzadas</b>	<b>17</b>
<b>1.30</b>	<b>Problemas Propuestos para casa</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Rigidez, Compresibilidad, Flexión y Torsión</b>	<b>21</b>
2.0.1	Módulo de Rigidez (Módulo de Corte)	21
2.0.2	Demostración del Módulo de Rigidez	21
2.0.3	Módulo de Compresibilidad (Bulk Modulus)	22
2.0.4	Demostración del Módulo de Compresibilidad	22
2.0.5	Coefficiente de Compresibilidad	23
2.0.6	Flexión de Vigas	23
2.0.7	Demostración de la Ecuación de Flexión	24
2.0.8	Torsión	25
2.0.9	Demostración de la Ecuación de Torsión	25
2.0.10	Relaciones entre Módulos Elásticos	26
2.0.11	Aplicación Integral en Ingeniería Civil	27
2.0.12	Problema Integrador	27
<b>2.1</b>	<b>Ejercicios Propuestos (Trabajo Domiciliario)</b>	<b>27</b>
2.1.1	Módulo de Rigidez y Corte	27
2.1.2	Compresibilidad y Mecánica de Fluidos	27
2.1.3	Flexión de Vigas	27
2.1.4	Torsión	28
2.1.5	Problemas Integradores (Nivel Alto)	28

<b>3</b>	<b>Hidrostática: Presión, Densidad y Peso Específico</b>	<b>29</b>
3.0.1	Definición de Presión	29
3.0.2	Demostración de la Ecuación Fundamental de la Hidrostática	29
3.0.3	Demostración de la Presión en un Fluido en Reposo	31
3.0.4	Densidad	32
3.0.5	Demostración de la Ley de Pascal	32
3.0.6	Peso Específico	32
3.0.7	Ecuación Fundamental de la Hidrostática	32
3.0.8	Presión Absoluta y Manométrica	33
3.0.9	Demostración de la Fuerza Hidrostática	33
3.0.10	Demostración del Centro de Presión	33
3.0.11	Demostración del Principio de Variación Lineal de Presión	34
3.0.12	Aplicaciones en Ingeniería Civil	34
3.0.13	Fuerza Hidrostática sobre Superficies	35
3.0.14	Centro de Presión	35
3.0.15	Ejemplo Aplicado (Ingeniería Civil)	35
3.0.16	Problema Integrador	35
3.0.17	Interpretación Física Global	35
<b>3.1</b>	<b>Ejercicios Propuestos de Hidrostática</b>	<b>36</b>
3.1.1	Presión y Densidad	36
3.1.2	Fuerza Hidrostática	36
3.1.3	Centro de Presión	36
3.1.4	Problemas Aplicados (Ingeniería Civil)	36
3.1.5	Problemas Integradores (Nivel Alto)	36
<b>4</b>	<b>Pascal, Manometría y Principio de Arquímedes</b>	<b>37</b>
4.0.1	Principio de Pascal	37
4.0.2	Manometría	38
4.0.3	Principio de Arquímedes	39
4.0.4	Problema Integrador	40
<b>4.1</b>	<b>Ejercicios Propuestos Avanzados</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>Superficies Sumergidas, Tensión y Capilaridad</b>	<b>43</b>
5.0.1	Fuerza Hidrostática sobre Superficies Planas	43
5.0.2	Demostración de la Fuerza Resultante	43
5.0.3	Centro de Presión	44
5.0.4	Demostración del Centro de Presión	44
5.0.5	Superficies Inclinadas	44
5.0.6	Fuerza sobre Superficies Curvas	45
5.0.7	Demostración de la Fuerza sobre Superficies Curvas	45
5.0.8	Aplicaciones en Ingeniería Civil	45
5.0.9	Tensión Superficial	45
5.0.10	Demostración Energética	45
5.0.11	Presión en Superficies Curvas (Ley de Laplace)	46
5.0.12	Demostración de la Ley de Laplace	46
5.0.13	Capilaridad	46
5.0.14	Ecuación de Capilaridad	46
5.0.15	Demostración de la Capilaridad	47
5.0.16	Capilaridad (Forma Vectorial)	47
5.0.17	Aplicaciones en Ingeniería Civil	47

<b>5.1</b>	<b>Ejercicios Propuestos para la casa: Superficies Sumergidas, Tensión Superficial y Capilaridad</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Viscosidad, Continuidad y Ecuación de Bernoulli</b>	<b>51</b>
6.0.1	Viscosidad	51
6.0.2	Principio de Viscosidad de Newton	51
6.0.3	Demostración (Flujo entre Placas)	51
6.0.4	Ecuación de Continuidad	52
6.0.5	Demostración	52
6.0.6	Demostración Diferencial de la Continuidad (Forma Expandida)	52
6.0.7	Caso Incompresible	53
6.0.8	Caudal o Gasto	53
6.0.9	Demostración	53
6.0.10	Ecuación de Bernoulli	53
6.0.11	Demostración de Bernoulli desde Trabajo–Energía	53
6.0.12	Demostración desde Navier-Stokes (Flujo Ideal)	54
6.0.13	Ley de Poiseuille	55
6.0.14	Demostración	55
6.0.15	Demostración del Caudal desde la Continuidad	55
6.0.16	Aplicaciones en Ingeniería Civil	56
<b>6.1</b>	<b>Ejercicios Propuestos Avanzados: Hidrodinámica</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>
	<b>Books</b>	<b>59</b>
<b>6.2</b>	<b>Bibliografía Recomendada</b>	<b>59</b>



# Parte Uno

<b>1</b>	<b>Elasticidad y Análisis Vectorial del Esfuerzo</b>	<b>9</b>
1.1	Introducción	
1.2	Fuerza como Vector	
1.3	Ley de Hooke	
1.4	Esfuerzo (Stress)	
1.5	Deformación (Strain)	
1.6	Esfuerzo en Forma Vectorial	
1.7	Deformación (Strain)	
1.8	Relación Esfuerzo-Deformación	
1.9	Demostración de la Relación	
1.10	Tipos de Esfuerzo desde el Enfoque Vectorial	
1.11	Deformación	
1.12	Elasticidad y Plasticidad	
1.13	Ley de Hooke (Forma Vectorial)	
1.14	Módulos de Elasticidad	
1.15	Coeficiente de Poisson	
1.16	Aplicación en Ingeniería	
1.17	Ejemplo 1: Proyección de esfuerzo	
1.18	Ejemplo en Scilab	
1.19	Cinemática del continuo	
1.20	Tensor de esfuerzos	
1.21	Ecuaciones de equilibrio	
1.22	Ley de Hooke generalizada	
1.23	Compatibilidad	
1.24	Energía de deformación	
1.25	Principio de mínima energía	
1.26	Ecuaciones de Navier	
1.27	Ejemplo avanzado: barra 1D	
1.28	Simulación en Scilab	
1.29	Aplicaciones avanzadas	
1.30	Problemas Propuestos para casa	
<b>2</b>	<b>Rigidez, Compresibilidad, Flexión y Torsión</b>	<b>21</b>
2.1	Ejercicios Propuestos (Trabajo Domiciliario)	
<b>3</b>	<b>Hidrostática: Presión, Densidad y Peso Específico</b>	<b>29</b>
3.1	Ejercicios Propuestos de Hidrostática	
<b>4</b>	<b>Pascal, Manometría y Principio de Arquímedes</b>	<b>37</b>
4.1	Ejercicios Propuestos Avanzados	
<b>5</b>	<b>Superficies Sumergidas, Tensión y Capilaridad</b>	<b>43</b>
5.1	Ejercicios Propuestos para la casa: Superficies Sumergidas, Tensión Superficial y Capilaridad	
<b>6</b>	<b>Viscosidad, Continuidad y Ecuación de Bernoulli</b>	<b>51</b>
6.1	Ejercicios Propuestos Avanzados: Hidrodinámica	
	<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>
	Books	
6.2	Bibliografía Recomendada	





# 1. Elasticidad y Análisis Vectorial del Esfuerzo

## 1.1 Introducción

La presente guía de Física II se desarrolla a nombre de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, dirigida a estudiantes del área de Ingeniería Civil y otras carreras. Su propósito es fortalecer el aprendizaje de los principios fundamentales de los fluidos, ondas, óptica, hidrodinámica y fenómenos físicos avanzados. El contenido integra teoría y aplicaciones prácticas, orientadas al análisis de sistemas físicos reales, permitiendo al estudiante desarrollar habilidades en modelado matemático, interpretación de fenómenos y resolución de problemas de ingeniería. Asimismo, se promueve el uso de herramientas tecnológicas y metodologías modernas para el estudio de sistemas físicos complejos.

En Ingeniería Civil, las cargas aplicadas sobre estructuras son magnitudes vectoriales. Por ello, el análisis de esfuerzos y deformaciones debe realizarse considerando sus componentes en el espacio tridimensional.

Este capítulo desarrolla la elasticidad de materiales incorporando un enfoque vectorial, fundamental para el análisis estructural.

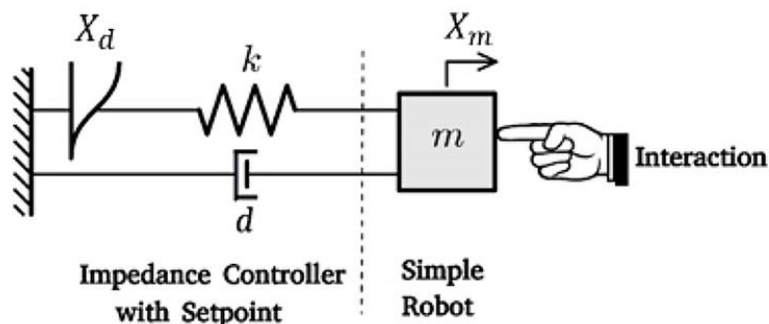


Figura 1.1.1: Elasticidad de materiales

## 1.2 Fuerza como Vector

La fuerza se representa como:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (1.2.1)$$

Su magnitud es:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.2.2)$$

### 1.2.1 Descomposición de Fuerzas

Una fuerza aplicada en una estructura puede descomponerse en sus componentes:

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma \quad (1.2.3)$$

## 1.3 Ley de Hooke

La Ley de Hooke establece que la deformación de un material es proporcional a la fuerza aplicada, siempre que no se supere el límite elástico:

$$F = kx \quad (1.3.1)$$

donde:

- $F$ : fuerza aplicada
- $k$ : constante elástica
- $x$ : deformación (alargamiento o compresión)

## 1.4 Esfuerzo (Stress)

El esfuerzo se define como la fuerza aplicada por unidad de área:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.4.1)$$

donde:

- $\sigma$ : esfuerzo (Pa)
- $F$ : fuerza aplicada
- $A$ : área transversal

## 1.5 Deformación (Strain)

La deformación unitaria se define como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.5.1)$$

donde:

- $\varepsilon$ : deformación
- $\Delta L$ : cambio de longitud
- $L_0$ : longitud inicial

## 1.6 Esfuerzo en Forma Vectorial

El esfuerzo se define como fuerza por unidad de área:

$$\sigma = \frac{|\vec{F}|}{A} \quad (1.6.1)$$

Sin embargo, en análisis vectorial:

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{A} \quad (1.6.2)$$

## 1.7 Deformación (Strain)

La deformación unitaria se define como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.7.1)$$

donde:

- $\varepsilon$ : deformación
- $\Delta L$ : cambio de longitud
- $L_0$ : longitud inicial

## 1.8 Relación Esfuerzo-Deformación

Experimentalmente se cumple que el esfuerzo es proporcional a la deformación:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.8.1)$$

donde:

- $E$ : módulo de Young

## 1.9 Demostración de la Relación

Partimos de la Ley de Hooke:

$$F = k\Delta L \quad (1.9.1)$$

Sabemos que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.9.2)$$

Entonces:

$$F = \sigma A \quad (1.9.3)$$

Reemplazando:

$$\sigma A = k\Delta L \quad (1.9.4)$$

Despejando:

$$\sigma = \frac{k}{A}\Delta L \quad (1.9.5)$$

Multiplicamos y dividimos por  $L_0$ :

$$\sigma = \frac{kL_0}{A} \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.9.6)$$

Sabemos que:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.9.7)$$

Entonces:

$$\sigma = \left( \frac{kL_0}{A} \right) \varepsilon \quad (1.9.8)$$

Comparando con:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.9.9)$$

Se obtiene:

$$E = \frac{kL_0}{A} \quad (1.9.10)$$

## 1.10 Tipos de Esfuerzo desde el Enfoque Vectorial

### 1.10.1 Esfuerzo Normal

Cuando la fuerza es perpendicular al área:

$$\sigma_n = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{A} \quad (1.10.1)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal unitario.

### 1.10.2 Esfuerzo Cortante

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma} - \sigma_n \hat{n} \quad (1.10.2)$$

## 1.11 Deformación

### 1.11.1 Deformación Longitudinal

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.11.1)$$

### 1.11.2 Deformación Vectorial

El cambio de longitud puede expresarse como:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i \quad (1.11.2)$$

## 1.12 Elasticidad y Plasticidad

### 1.12.1 Régimen Elástico

- Relación lineal
- Reversible

### 1.12.2 Régimen Plástico

- Deformación permanente
- Importante en fallas estructurales

## 1.13 Ley de Hooke (Forma Vectorial)

$$\vec{\sigma} = E \vec{\varepsilon} \quad (1.13.1)$$

## 1.14 Módulos de Elasticidad

### 1.14.1 Módulo de Young

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1.14.1)$$

### 1.14.2 Módulo de Corte

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.14.2)$$

### 1.14.3 Módulo Volumétrico

$$K = \frac{P}{\Delta V/V} \quad (1.14.3)$$

## 1.15 Coeficiente de Poisson

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}} \quad (1.15.1)$$

## 1.16 Aplicación en Ingeniería

### 1.16.1 Carga inclinada en una barra

Sea una fuerza inclinada:

$$\vec{F} = (3000\hat{i} + 4000\hat{j})N \quad (1.16.1)$$

Magnitud:

$$|\vec{F}| = 5000N \quad (1.16.2)$$

Esfuerzo:

$$\sigma = \frac{5000}{A} \quad (1.16.3)$$

### 1.17 Ejemplo 1: Proyección de esfuerzo

Sea  $\vec{F} = (6000, 8000, 0)$  N y un plano con normal  $\hat{n} = (1, 0, 0)$ :

$$\sigma_n = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{A} \quad (1.17.1)$$

$$\sigma_n = \frac{6000}{A} \quad (1.17.2)$$

### 1.18 Ejemplo en Scilab

```
// VECTOR FUERZA
```

```
Fx = 6000;
```

```
Fy = 8000;
```

```
Fz = 0;
```

```
F = sqrt(Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)
```

```
A = 0.02;
```

```
sigma = F / A
```

```
disp("Esfuerzo:")
```

```
disp(sigma)
```

### 1.19 Cinemática del continuo

Sea un campo de desplazamientos:

$$\vec{u} = (u, v, w) \quad (1.19.1)$$

El tensor de deformación infinitesimal está dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.19.2)$$

## 1.20 Tensor de esfuerzos

El estado de esfuerzos se describe mediante el tensor:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.20.1)$$

## 1.21 Ecuaciones de equilibrio

En ausencia de aceleraciones:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.21.1)$$

Forma expandida:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (1.21.2)$$

## 1.22 Ley de Hooke generalizada

Para materiales isotrópicos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (1.22.1)$$

donde:

- $\lambda$  y  $G$  son constantes de Lamé
- $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker

Relación con constantes clásicas:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.22.2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.22.3)$$

## 1.23 Compatibilidad

Las deformaciones deben cumplir:

$$\nabla \times (\nabla \times \varepsilon) = 0 \quad (1.23.1)$$

## 1.24 Energía de deformación

Densidad de energía:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1.24.1)$$

Energía total:

$$\Pi = \int_V U dV \quad (1.24.2)$$

## 1.25 Principio de mínima energía

El equilibrio se obtiene cuando:

$$\delta \Pi = 0 \quad (1.25.1)$$

Este principio es la base del método de elementos finitos (FEM).

## 1.26 Ecuaciones de Navier

Sustituyendo en equilibrio:

$$G \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f} = 0 \quad (1.26.1)$$

## 1.27 Ejemplo avanzado: barra 1D

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (1.27.1)$$

Solución:

$$u(x) = C_1 x + C_2 \quad (1.27.2)$$

## 1.28 Simulación en Scilab

### 1.28.1 Campo de deformación 1D

```

clc;
clear;

x = 0:0.1:10;
u = 0.01 * x; // desplazamiento

du_dx = diff(u)./diff(x);

disp("Deformacion:");
disp(du_dx);

```

**1.28.2 Solución numérica tipo FEM (simplificado)**

```

n = 10;
L = 1;
dx = L/n;

K = zeros(n,n);
F = zeros(n,1);

E = 200e9;
A = 0.01;

for i=2:n-1
    K(i,i-1) = -E*A/dx;
    K(i,i)   = 2*E*A/dx;
    K(i,i+1) = -E*A/dx;
end

// condiciones de frontera
K(1,1) = 1;
K(n,n) = 1;

u = K\F;

disp("Desplazamientos:");
disp(u);

```

**1.28.3 Visualización de campo de desplazamiento**

```

plot(u);
title("Campo de desplazamiento");
xlabel("Nodo");
ylabel("u(x)");

```

**1.29 Aplicaciones avanzadas**

- Método de Elementos Finitos (FEM)
- Diseño aeroespacial
- Análisis estructural avanzado
- Robótica flexible
- Materiales compuestos

**1.30 Problemas Propuestos para casa**

Cada alumno deberá resolver los problemas de manera manual y detallada en hojas cuadrículadas. La entrega será semanal e incluirá todo lo avanzado hasta la fecha. Es obligatorio resolver la totalidad de los ejercicios propuestos, mostrando el procedimiento completo paso a paso.

**Problema 1**

Una fuerza  $\vec{F} = (4000\hat{i} + 3000\hat{j})$  N actúa sobre una sección de área  $A = 0,01 \text{ m}^2$ . Calcule:

- Magnitud de la fuerza

- Esfuerzo total

**Problema 2**

Una barra está sometida a una fuerza  $\vec{F} = (5000, 2000, 1000)$  N. Determine:

- La magnitud de la fuerza
- El esfuerzo si  $A = 0,02 m^2$

**Problema 3**

Una fuerza de 8000 N forma ángulos de  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  con los ejes coordenados. Determine sus componentes vectoriales.

**Problema 4**

Determine el esfuerzo normal sobre un plano cuya normal es  $\hat{n} = (0, 1, 0)$  si  $\vec{F} = (3000, 6000, 0)$  N y  $A = 0,015 m^2$ .

**Problema 5**

Una barra de longitud  $2,5 m$  se alarga  $1,5 \times 10^{-5} m$ . Determine la deformación unitaria.

**Problema 6**

Calcule el módulo de Young si un esfuerzo de  $5 \times 10^6 Pa$  produce una deformación de  $2,5 \times 10^{-5}$ .

**Problema 7**

Una barra soporta una carga axial de  $25000 N$ . Si el área es  $0,005 m^2$ , determine el esfuerzo.

**Problema 8**

Una fuerza inclinada genera componentes:  $F_x = 6000 N$ ,  $F_y = 8000 N$ . Determine:

- Magnitud total
- Dirección de la fuerza

**Problema 9**

Calcule el esfuerzo cortante si una fuerza tangencial de  $9000 N$  actúa sobre un área de  $0,03 m^2$ .

**Problema 10**

Una barra experimenta una deformación longitudinal de  $0,0002$  y una transversal de  $-0,00005$ . Determine el coeficiente de Poisson.

**Problema 11**

Una fuerza  $\vec{F} = (7000, -2000, 3000)$  N actúa sobre una sección. Determine el esfuerzo sobre un plano con normal  $\hat{n} = (1, 0, 0)$ .

**Problema 12**

Determine la deformación de una barra de  $3 m$  sometida a  $20000 N$ , si:  $A = 0,01 m^2$ ,  $E = 210 \times 10^9 Pa$ .

**Problema 13**

Una estructura está sometida a dos fuerzas:

$$\vec{F}_1 = (2000, 3000, 0), \quad \vec{F}_2 = (1000, -2000, 4000)$$

Determine la fuerza resultante.

**Problema 14**

Determine el esfuerzo en una columna de concreto con carga de  $80000 N$  y área de  $0,04 m^2$ .

**Problema 15**

Calcule el módulo de corte si  $\tau = 3 \times 10^6 Pa$  y  $\gamma = 0,001$ .

**Problema 16**

Una barra se alarga  $0,002 m$  bajo una carga de  $15000 N$ . Si  $L = 4 m$ ,  $A = 0,02 m^2$ , determine  $E$ .

**Problema 17**

Determine la proyección de  $\vec{F} = (5000, 5000, 0)$  sobre un eje que forma  $45^\circ$  con el eje  $x$ .

**Problema 18**

Calcule el esfuerzo sobre un plano inclinado cuya normal es  $\hat{n} = (0,707, 0,707, 0)$ , si  $\vec{F} = (10000, 0, 0)$  y  $A = 0,02 m^2$ .

**Problema 19**

Una barra presenta  $\epsilon = 0,0003$ . Si  $E = 200 \times 10^9 Pa$ , determine el esfuerzo.

**Problema 20**

Una estructura está sometida a:

$$\vec{F} = (3000, 4000, 12000)$$

Determine:

- Magnitud de la fuerza
- Esfuerzo si  $A = 0,05 m^2$





## 2. Rigidez, Compresibilidad, Flexión y Torsión

### 2.0.1 Módulo de Rigidez (Módulo de Corte)

El módulo de rigidez  $G$  describe la relación entre el esfuerzo cortante y la deformación angular:

$$\tau = G\gamma \quad (2.0.1)$$

donde:

- $\tau$  es el esfuerzo cortante [Pa]
- $\gamma$  es la deformación angular (adimensional)
- $G$  es el módulo de rigidez [Pa]

### 2.0.2 Demostración del Módulo de Rigidez

Partimos de la deformación angular en un elemento diferencial:

$$\gamma = \tan(\theta) \approx \theta = \frac{\Delta x}{L} \quad (2.0.2)$$

Por definición experimental (Ley de Hooke en corte):

$$\tau \propto \gamma \quad (2.0.3)$$

Introduciendo la constante de proporcionalidad:

$$\tau = G\gamma \quad (2.0.4)$$

**Formulación Vectorial**

El esfuerzo cortante puede expresarse como parte del tensor de esfuerzos:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.0.5)$$

La relación constitutiva en materiales isotrópicos:

$$\tau_{ij} = G \gamma_{ij} \quad (2.0.6)$$

**Ejemplo**

Una viga de concreto experimenta un esfuerzo cortante de  $2\text{MPa}$  y una deformación angular de  $0,0005$ . Calcular  $G$ :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{2 \times 10^6}{0,0005} = 4 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (2.0.7)$$

**Aplicación:** Diseño de vigas en estructuras sometidas a cargas laterales (sismos, viento).

**2.0.3 Módulo de Compresibilidad (Bulk Modulus)**

El módulo de compresibilidad  $K$  mide la resistencia de un material al cambio de volumen:

$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad (2.0.8)$$

**Forma Diferencial**

$$K = -V \frac{dP}{dV} \quad (2.0.9)$$

**Relación Vectorial**

Para esfuerzos isotrópicos:

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} \quad (2.0.10)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker.

**2.0.4 Demostración del Módulo de Compresibilidad**

Consideramos un cubo sometido a presión uniforme  $P$ .

- Fuerza sobre cada cara:  $F = PA$
- Trabajo realizado:  $dW = -PdV$

Por definición de energía volumétrica:

$$dW = K \frac{dV}{V} \quad (2.0.11)$$

Igualando:

$$-PdV = K \frac{dV}{V} \quad (2.0.12)$$

Simplificando:

$$K = -V \frac{dP}{dV} \quad (2.0.13)$$

### Ejemplo

El agua en un suelo se comprime bajo presión. Si:

- $\Delta P = 5 \times 10^6 Pa$
- $\frac{\Delta V}{V} = -0,002$

$$K = \frac{5 \times 10^6}{0,002} = 2,5 \times 10^9 Pa \quad (2.0.14)$$

**Aplicación:** Mecánica de suelos y consolidación.

## 2.0.5 Coeficiente de Compresibilidad

Se define como:

$$\beta = \frac{1}{K} \quad (2.0.15)$$

### Interpretación

- Materiales con alta  $\beta$  son fácilmente compresibles
- Materiales con bajo  $\beta$  son rígidos

### Ejemplo

$$\beta = \frac{1}{2,5 \times 10^9} = 4 \times 10^{-10} Pa^{-1} \quad (2.0.16)$$

**Aplicación:** Evaluación de asentamientos en cimentaciones.

## 2.0.6 Flexión de Vigas

La ecuación fundamental de flexión:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (2.0.17)$$

donde:

- $M$  es el momento flector
- $y$  es la distancia al eje neutro
- $I$  es el momento de inercia

### Forma Vectorial

El momento puede expresarse como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.0.18)$$

## Ecuación Diferencial de la Curvatura

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (2.0.19)$$

**2.0.7 Demostración de la Ecuación de Flexión**

Partimos de la hipótesis de Bernoulli:

- Las secciones planas permanecen planas

La deformación longitudinal es:

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad (2.0.20)$$

Aplicando Ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{R} \quad (2.0.21)$$

El momento interno:

$$M = \int_A \sigma y dA \quad (2.0.22)$$

Sustituyendo:

$$M = \int_A \left(E\frac{y}{R}\right) y dA \quad (2.0.23)$$

$$M = \frac{E}{R} \int_A y^2 dA \quad (2.0.24)$$

Definiendo el momento de inercia:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (2.0.25)$$

Entonces:

$$M = \frac{EI}{R} \quad (2.0.26)$$

Despejando:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (2.0.27)$$

Finalmente:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (2.0.28)$$

**Ejemplo (Ingeniería Civil)**

Una viga con:

- $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $I = 5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
- $y = 0,1 \text{ m}$

$$\sigma = \frac{10 \times 10^3 \cdot 0,1}{5 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^8 \text{ Pa} \quad (2.0.29)$$

**Aplicación:** Diseño estructural de vigas en edificios y puentes.

**2.0.8 Torsión**

La ecuación de torsión en ejes circulares:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad (2.0.30)$$

donde:

- $T$  es el torque
- $r$  es la distancia radial
- $J$  es el momento polar de inercia

**Ángulo de Torsión**

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \quad (2.0.31)$$

**Forma Vectorial**

El torque:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.0.32)$$

**2.0.9 Demostración de la Ecuación de Torsión**

Consideramos un eje circular sometido a torque  $T$ .

La deformación angular:

$$\gamma = \frac{r\theta}{L} \quad (2.0.33)$$

Ley de Hooke en corte:

$$\tau = G\gamma = G \frac{r\theta}{L} \quad (2.0.34)$$

El torque diferencial:

$$dT = r \tau dA \quad (2.0.35)$$

Sustituyendo:

$$dT = r \left( G \frac{r\theta}{L} \right) dA \quad (2.0.36)$$

$$dT = \frac{G\theta}{L} r^2 dA \quad (2.0.37)$$

Integrando:

$$T = \frac{G\theta}{L} \int_A r^2 dA \quad (2.0.38)$$

Definiendo el momento polar:

$$J = \int_A r^2 dA \quad (2.0.39)$$

Entonces:

$$T = \frac{GJ\theta}{L} \quad (2.0.40)$$

Despejando:

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \quad (2.0.41)$$

Y el esfuerzo:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad (2.0.42)$$

### Ejemplo (Ingeniería Civil)

Un eje de acero:

- $T = 500 Nm$
- $r = 0,05 m$
- $J = 1 \times 10^{-5} m^4$

$$\tau = \frac{500 \cdot 0,05}{1 \times 10^{-5}} = 2,5 \times 10^6 Pa \quad (2.0.43)$$

**Aplicación:** Columnas sometidas a torsión en estructuras.

## 2.0.10 Relaciones entre Módulos Elásticos

Para materiales isotrópicos:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (2.0.44)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.0.45)$$

donde:

- $E$  es el módulo de Young
- $\nu$  es el coeficiente de Poisson

### 2.0.11 Aplicación Integral en Ingeniería Civil

En una estructura real:

- La **flexión** domina en vigas
- La **torsión** aparece en estructuras irregulares
- La **compresibilidad** es clave en suelos
- El **corte** afecta conexiones y columnas

### 2.0.12 Problema Integrador

Una columna sometida a:

- Compresión axial
- Momento flector
- Torque

El estado de esfuerzo total:

$$\sigma_{total} = \sigma_{axial} + \sigma_{flexion} + \tau_{torsion} \quad (2.0.46)$$

Esto permite analizar fallas combinadas en estructuras reales.

## 2.1 Ejercicios Propuestos (Trabajo Domiciliario)

**Indicaciones:**

- Los siguientes ejercicios deberán ser resueltos **a mano**, de manera **ordenada y detallada**.
- Se debe justificar cada paso del desarrollo matemático y físico.
- Incluir diagramas, esquemas y unidades correctamente.
- Presentar el trabajo en **hojas cuadrículadas**.
- No se aceptarán soluciones solo con resultados finales.

### 2.1.1 Módulo de Rigidez y Corte

1. Un bloque de material está sometido a un esfuerzo cortante de  $3\text{ MPa}$  produciendo una deformación angular de  $0,0008$ . Determine el módulo de rigidez.
2. Demostrar a partir de principios geométricos que  $\gamma = \frac{\Delta x}{L}$  para pequeñas deformaciones.
3. Un elemento estructural presenta un estado de esfuerzos cortantes  $\tau_{xy} = 5\text{ MPa}$ . Determine la deformación angular si  $G = 2 \times 10^9\text{ Pa}$ .
4. En un tensor de esfuerzos dado, identifique los esfuerzos cortantes y represéntelos vectorialmente.

### 2.1.2 Compresibilidad y Mecánica de Fluidos

5. Un fluido reduce su volumen en un  $0,15\%$  bajo una presión de  $4\text{ MPa}$ . Determine el módulo de compresibilidad.
6. Demostrar la expresión  $K = -V \frac{dP}{dV}$  a partir del trabajo mecánico.
7. Un suelo saturado experimenta un incremento de presión. Analice el cambio volumétrico considerando un modelo elástico.
8. Determine el coeficiente de compresibilidad de un material con  $K = 3 \times 10^9\text{ Pa}$  e interprete su significado físico.

### 2.1.3 Flexión de Vigas

9. Una viga simplemente apoyada soporta un momento máximo de  $15\text{ kN} \cdot \text{m}$ . Determine el esfuerzo máximo si  $I = 8 \times 10^{-6}\text{ m}^4$  y  $y = 0,12\text{ m}$ .

10. Demostrar la ecuación  $\sigma = \frac{My}{I}$  desde la distribución de deformaciones.
11. Calcular la curvatura de una viga con  $E = 200\text{ GPa}$ ,  $I = 6 \times 10^{-6}\text{ m}^4$  y  $M = 12\text{ kN} \cdot \text{m}$ .
12. Una viga de concreto presenta diferentes momentos a lo largo de su longitud. Analice el punto de máxima tensión.
13. Resolver el diagrama de esfuerzos normales en una sección rectangular sometida a flexión.

#### 2.1.4 Torsión

14. Un eje circular transmite un torque de  $800\text{ Nm}$ . Determine el esfuerzo cortante máximo si  $J = 2 \times 10^{-5}\text{ m}^4$  y  $r = 0,06\text{ m}$ .
15. Demostrar la ecuación  $\tau = \frac{Tr}{J}$  a partir del equilibrio de momentos.
16. Determinar el ángulo de torsión en un eje de longitud  $2\text{ m}$ , con  $G = 80\text{ GPa}$ .
17. Analizar el comportamiento de un eje sometido simultáneamente a torsión y flexión.

#### 2.1.5 Problemas Integradores (Nivel Alto)

18. Una columna estructural está sometida a carga axial, momento flector y torque. Determine el estado completo de esfuerzos utilizando superposición.
19. Un elemento de suelo bajo una cimentación experimenta compresión volumétrica y esfuerzos cortantes. Modele el problema utilizando módulos  $E$ ,  $G$  y  $K$ .
20. Diseñar una viga que soporte simultáneamente carga distribuida y torsión, verificando que no supere los esfuerzos admisibles del material.

**Nota:** Estos ejercicios están diseñados para desarrollar habilidades de análisis, modelado matemático y aplicación en problemas reales de Ingeniería Civil. Se evaluará tanto el procedimiento como la interpretación física de los resultados.



## 3. Hidrostática: Presión, Densidad y Peso Específico

### 3.0.1 Definición de Presión

La presión se define como la fuerza normal aplicada sobre una superficie por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} \quad (3.0.1)$$

Forma Vectorial

$$\vec{F} = -P\vec{n}A \quad (3.0.2)$$

donde:

- $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie
- El signo negativo indica que la presión actúa hacia el interior

### 3.0.2 Demostración de la Ecuación Fundamental de la Hidrostática

Consideremos un elemento diferencial de fluido en reposo con dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Aplicamos equilibrio de fuerzas en dirección vertical ( $z$ ):

$$\sum F_z = 0 \quad (3.0.3)$$

Fuerzas actuantes:

- Presión inferior:  $P(z)A$
- Presión superior:  $P(z + dz)A$
- Peso del fluido:  $\rho g dV = \rho g Adz$

Entonces:

$$P(z)A - P(z + dz)A - \rho g Adz = 0 \quad (3.0.4)$$

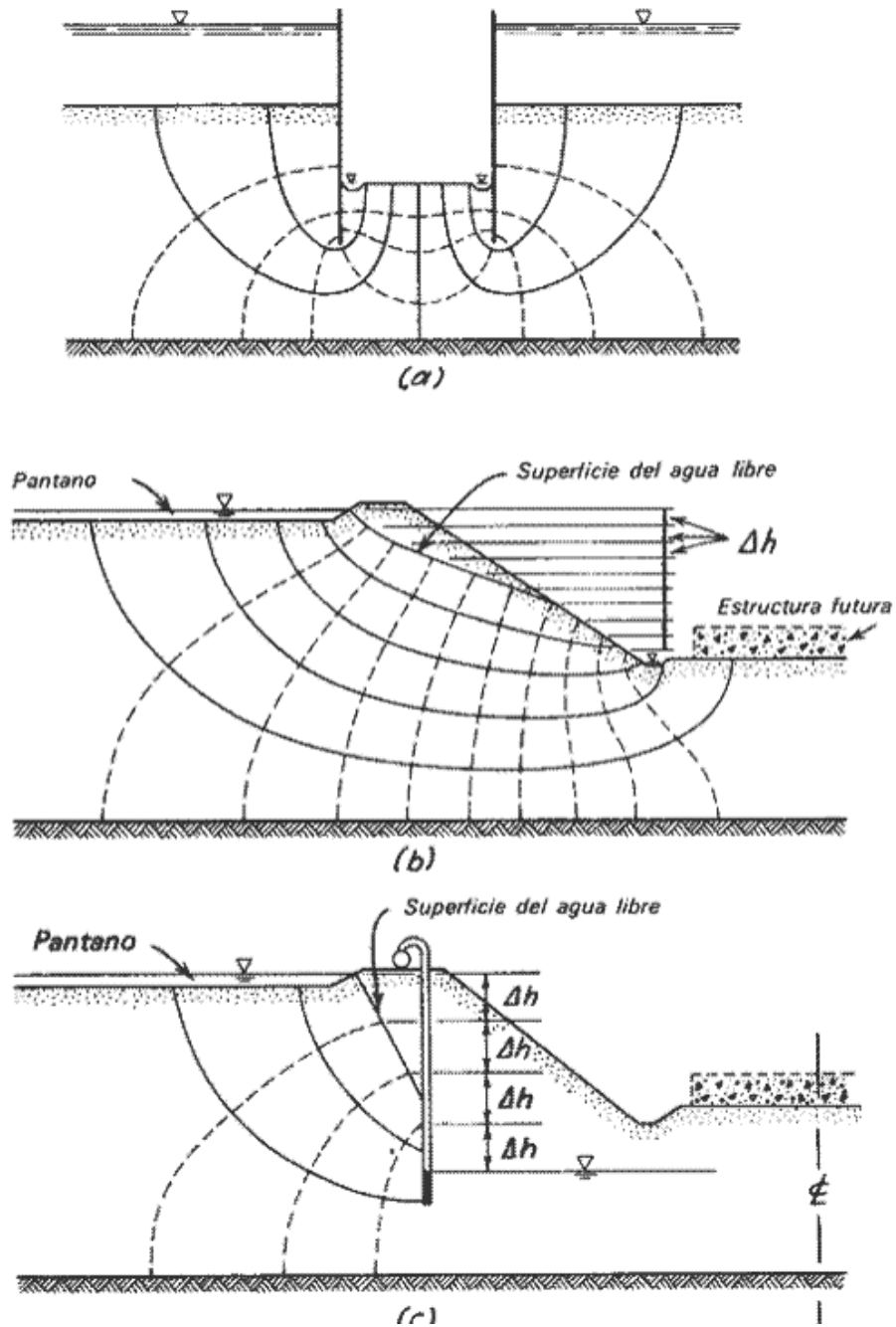


Figura 3.0.1: Hidrostática

Dividiendo entre  $A$ :

$$P(z) - P(z + dz) - \rho g dz = 0 \quad (3.0.5)$$

Aplicando expansión de Taylor:

$$P(z + dz) = P(z) + \frac{dP}{dz} dz \quad (3.0.6)$$

Sustituyendo:

$$P(z) - \left( P(z) + \frac{dP}{dz} dz \right) - \rho g dz = 0 \quad (3.0.7)$$

$$-\frac{dP}{dz} dz - \rho g dz = 0 \quad (3.0.8)$$

Dividiendo entre  $dz$ :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.0.9)$$

### 3.0.3 Demostración de la Presión en un Fluido en Reposo

Consideramos un elemento diferencial cúbico dentro de un fluido en equilibrio. Aplicando equilibrio de fuerzas en dirección  $z$ :

$$\sum F_z = 0 \quad (3.0.10)$$

$$P(z)A - P(z + dz)A - \rho g A dz = 0 \quad (3.0.11)$$

Dividiendo entre  $A$ :

$$P(z) - P(z + dz) - \rho g dz = 0 \quad (3.0.12)$$

$$-\frac{dP}{dz} = \rho g \quad (3.0.13)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.0.14)$$

Integrando:

$$P = P_0 + \rho gh \quad (3.0.15)$$

### 3.0.4 Densidad

La densidad se define como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.0.16)$$

#### Forma Diferencial

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (3.0.17)$$

#### Ejemplo

Un material con masa  $2000\text{ kg}$  y volumen  $1\text{ m}^3$ :

$$\rho = 2000\text{ kg/m}^3 \quad (3.0.18)$$

### 3.0.5 Demostración de la Ley de Pascal

Consideremos un elemento infinitesimal en equilibrio.

En ausencia de fuerzas cortantes (fluido en reposo), el tensor de esfuerzos es:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \quad (3.0.19)$$

Esto implica:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad (3.0.20)$$

**Aplicación:** Diseño de materiales y análisis de suelos.

### 3.0.6 Peso Específico

El peso específico es:

$$\gamma = \rho g \quad (3.0.21)$$

#### Forma Vectorial

$$\vec{\gamma} = \rho \vec{g} \quad (3.0.22)$$

#### Ejemplo

Para agua:

$$\gamma = 1000 \times 9,81 = 9810\text{ N/m}^3 \quad (3.0.23)$$

### 3.0.7 Ecuación Fundamental de la Hidrostática

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.0.24)$$

**Interpretación**

- La presión aumenta con la profundidad
- Depende de la densidad del fluido

**3.0.8 Presión Absoluta y Manométrica**

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{man} \quad (3.0.25)$$

**3.0.9 Demostración de la Fuerza Hidrostática**

La fuerza total sobre una superficie es:

$$F = \int_A P dA \quad (3.0.26)$$

Sustituyendo  $P = \rho gh$ :

$$F = \int_A \rho gh dA \quad (3.0.27)$$

Como  $\rho g$  es constante:

$$F = \rho g \int_A h dA \quad (3.0.28)$$

Definimos:

$$h_c = \frac{1}{A} \int_A h dA \quad (3.0.29)$$

Entonces:

$$F = \rho gh_c A \quad (3.0.30)$$

**3.0.10 Demostración del Centro de Presión**

El momento respecto a la superficie libre:

$$M = \int_A P y dA \quad (3.0.31)$$

Sustituyendo:

$$M = \rho g \int_A y^2 dA \quad (3.0.32)$$

Pero:

$$F \cdot y_p = M \quad (3.0.33)$$

Entonces:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{\int_A y dA} \quad (3.0.34)$$

Usando propiedades geométricas:

$$y_p = \frac{I_G}{y_c A} + y_c \quad (3.0.35)$$

### 3.0.11 Demostración del Principio de Variación Lineal de Presión

De la ecuación:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.0.36)$$

Si  $\rho$  es constante:

$$\int dP = -\rho g \int dz \quad (3.0.37)$$

$$P = -\rho g z + C \quad (3.0.38)$$

En la superficie libre ( $z = 0$ ):

$$P = P_0 \quad (3.0.39)$$

Entonces:

$$P = P_0 + \rho g h \quad (3.0.40)$$

#### Ejemplo

Si  $P_{man} = 50 \text{ kPa}$ :

$$P_{abs} = 101 + 50 = 151 \text{ kPa} \quad (3.0.41)$$

### 3.0.12 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Diseño de presas
- Cálculo de empuje en muros de contención
- Análisis de presión en tuberías
- Mecánica de suelos (presión de poros)

### 3.0.13 Fuerza Hidrostática sobre Superficies

$$F = \int_A P dA \quad (3.0.42)$$

Si la presión es lineal:

$$F = \rho g h_c A \quad (3.0.43)$$

donde  $h_c$  es la profundidad del centroide.

### 3.0.14 Centro de Presión

$$y_p = \frac{I_G}{y_c A} + y_c \quad (3.0.44)$$

donde:

- $I_G$  es el momento de inercia respecto al centroide
- $y_c$  es la profundidad del centroide

### 3.0.15 Ejemplo Aplicado (Ingeniería Civil)

Una compuerta rectangular:

- Altura:  $2\text{ m}$
- Ancho:  $1,5\text{ m}$
- Sumergida verticalmente

$$F = \rho g h_c A \quad (3.0.45)$$

$$A = 3\text{ m}^2, \quad h_c = 1\text{ m} \quad (3.0.46)$$

$$F = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot 3 = 29430\text{ N} \quad (3.0.47)$$

### 3.0.16 Problema Integrador

Determinar la fuerza total y el punto de aplicación sobre un muro de contención sumergido considerando:

- Variación lineal de presión
- Densidad constante
- Superficie plana

### 3.0.17 Interpretación Física Global

- La presión es escalar pero genera fuerzas vectoriales
- La hidrostática es base para estructuras hidráulicas
- La variación de presión gobierna estabilidad estructural

### 3.1 Ejercicios Propuestos de Hidrostática

#### Indicaciones:

- Resolver **a mano**, con desarrollo completo y ordenado.
- Justificar cada paso matemático y físico.
- Incluir diagramas (distribución de presión, fuerzas, etc.).
- Entregar en **hojas cuadriculadas**.
- Usar unidades del SI correctamente.

#### 3.1.1 Presión y Densidad

1. Determinar la presión a  $10m$  de profundidad en agua y en aceite ( $\rho = 850\text{ kg/m}^3$ ). Compare resultados.
2. Un fluido tiene densidad variable  $\rho(z) = 1000 + 2z$ . Determine la presión en función de la profundidad.
3. Demostrar que la presión es independiente de la forma del recipiente.
4. Un tanque contiene dos fluidos en capas. Determine la presión en el fondo.
5. Un submarino desciende hasta  $300m$ . Calcule la presión absoluta.

#### 3.1.2 Fuerza Hidrostática

6. Una compuerta rectangular vertical de  $3 \times 2m$  está sumergida. Determine la fuerza total.
7. Determinar la fuerza sobre una superficie inclinada a  $30^\circ$ .
8. Una presa tiene forma trapezoidal. Determine la fuerza resultante del agua.
9. Calcular la fuerza sobre una compuerta circular sumergida.
10. Un tanque cilíndrico está lleno de agua. Determine la fuerza sobre su base.

#### 3.1.3 Centro de Presión

11. Determinar el centro de presión en una placa rectangular vertical.
12. Calcular el centro de presión en una superficie inclinada.
13. Comparar el centroide y el centro de presión para una placa sumergida.
14. Una compuerta triangular está sumergida. Determine el punto de aplicación de la fuerza.
15. Analizar cómo cambia el centro de presión al variar la profundidad.

#### 3.1.4 Problemas Aplicados (Ingeniería Civil)

16. Diseñar una compuerta que soporte una presión máxima dada sin fallar.
17. Analizar el empuje sobre un muro de contención parcialmente sumergido.
18. Determinar la distribución de presión en una presa real.
19. Un reservorio presenta filtraciones. Analizar el efecto de la presión en las paredes.
20. Modelar la presión de poros en un suelo saturado bajo carga.

#### 3.1.5 Problemas Integradores (Nivel Alto)

21. Un sistema contiene tres fluidos con diferentes densidades. Determinar la presión en cada interfaz.
22. Una compuerta inclinada está sometida a presión variable. Determinar fuerza y momento.
23. Diseñar un tanque que soporte presión hidrostática considerando factor de seguridad.
24. Analizar la estabilidad de una estructura sumergida bajo presión hidrostática.
25. Resolver el campo de presiones en un fluido con densidad no uniforme.



## 4. Pascal, Manometría y Principio de Arquímedes

### 4.0.1 Principio de Pascal

#### Definición

El principio de Pascal establece que:

*Todo cambio de presión aplicado a un fluido confinado se transmite íntegramente y en todas las direcciones.*

$$P = \frac{F}{A} \quad (4.0.1)$$

#### Demostración

Consideremos un fluido en equilibrio dentro de un recipiente cerrado.

Del estado de esfuerzos:

$$\sigma = -PI \quad (4.0.2)$$

Si se aplica una variación  $\Delta P$  en una superficie:

$$P' = P + \Delta P \quad (4.0.3)$$

Por isotropía del fluido:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \quad (4.0.4)$$

Por lo tanto, el incremento de presión se transmite sin pérdida:

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \quad (4.0.5)$$



Figura 4.0.1: fluido confinado se transmite

#### Aplicación: Prensa Hidráulica

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (4.0.6)$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \quad (4.0.7)$$

#### Aplicación en ingeniería civil:

- Gatos hidráulicos
- Sistemas de elevación
- Equipos de construcción pesada

### 4.0.2 Manometría

#### Definición

La manometría estudia la medición de presión utilizando columnas de fluidos.

#### Ecuación General

$$P_1 + \rho_1 g h_1 = P_2 + \rho_2 g h_2 \quad (4.0.8)$$

#### Demostración

A partir de la ecuación fundamental:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (4.0.9)$$

Integrando entre dos puntos:

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (4.0.10)$$

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \quad (4.0.11)$$

### Tipos de Manómetros

- Manómetro de tubo en U
- Manómetro diferencial
- Barómetro

### Ejemplo

Un manómetro en U contiene agua y mercurio:

$$P = \rho g h \quad (4.0.12)$$

Si  $h = 0,5 \text{ m}$  y  $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$ :

$$P = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 66708 \text{ Pa} \quad (4.0.13)$$

## 4.0.3 Principio de Arquímedes

### Definición

*Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.*

$$E = \rho g V \quad (4.0.14)$$

### Demostración

Consideremos un cuerpo sumergido.

Fuerza inferior:

$$F_1 = P_1 A \quad (4.0.15)$$

Fuerza superior:

$$F_2 = P_2 A \quad (4.0.16)$$

Diferencia:

$$E = F_1 - F_2 \quad (4.0.17)$$

Sustituyendo presión:

$$E = \rho g h_1 A - \rho g h_2 A \quad (4.0.18)$$

$$E = \rho g(h_1 - h_2)A \quad (4.0.19)$$

Pero:

$$(h_1 - h_2)A = V \quad (4.0.20)$$

Entonces:

$$E = \rho gV \quad (4.0.21)$$

#### Condiciones de Flotación

- Si  $E > W \rightarrow$  el cuerpo flota
- Si  $E = W \rightarrow$  equilibrio
- Si  $E < W \rightarrow$  se hunde

#### Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Diseño de estructuras flotantes
- Estabilidad de pontones
- Evaluación de suelos saturados
- Flotación de tuberías

#### 4.0.4 Problema Integrador

Un bloque sumergido en agua está conectado a una prensa hidráulica:

- Determinar la fuerza transmitida
- Calcular el empuje
- Analizar condiciones de equilibrio

### 4.1 Ejercicios Propuestos Avanzados

Indicaciones:

- Resolver **a mano**, con desarrollo completo.
- Justificar cada ecuación utilizada.
- Incluir diagramas (FBD, distribución de presión, etc.).
- Entregar en **hojas cuadriculadas**.
- Se evaluará procedimiento, criterio ingenieril e interpretación física.

#### 1. Prensa Hidráulica

- a) Determinar la fuerza de salida si  $A_1 = 0,01 \text{ m}^2$  y  $A_2 = 0,5 \text{ m}^2$ .
- b) Analizar el efecto de pérdidas por fugas (5%).
- c) Determinar la presión en cada pistón.

#### 2. Sistema Multifluidos en Manómetro

- a) Determinar la presión en el punto base.
- b) Evaluar el efecto de un fluido intermedio.
- c) Graficar la distribución de presión.

#### 3. Empuje en Cuerpo Sumergido

- a) Calcular el empuje total.
- b) Determinar si el cuerpo flota.
- c) Hallar el volumen sumergido en equilibrio.

4. **Compuerta Hidráulica**
  - a) Determinar la fuerza resultante.
  - b) Hallar el centro de presión.
  - c) Evaluar momento respecto a la base.
5. **Tanque Presurizado**
  - a) Determinar la presión en el fondo.
  - b) Evaluar la presión absoluta.
  - c) Analizar condiciones de seguridad estructural.
6. **Barómetro y Presión Atmosférica**
  - a) Determinar la presión atmosférica.
  - b) Analizar cambios con altura.
  - c) Evaluar condiciones en zonas altoandinas.
7. **Flotación de Estructura**
  - a) Determinar el empuje.
  - b) Evaluar estabilidad.
  - c) Calcular volumen desplazado.
8. **Manómetro Diferencial**
  - a) Determinar diferencia de presión.
  - b) Analizar precisión del instrumento.
  - c) Evaluar error experimental.
9. **Sistema Hidráulico Real**
  - a) Determinar presiones en nodos.
  - b) Evaluar transmisión de fuerzas.
  - c) Analizar eficiencia.
10. **Empuje en Superficie Inclinada**
  - a) Determinar fuerza total.
  - b) Hallar punto de aplicación.
  - c) Evaluar momento resultante.
11. **Columna de Fluidos**
  - a) Determinar presión en cada nivel.
  - b) Analizar variación de densidad.
  - c) Graficar perfil de presión.
12. **Cuerpo Parcialmente Sumergido**
  - a) Determinar equilibrio.
  - b) Calcular fracción sumergida.
  - c) Analizar estabilidad.
13. **Presión en Suelos Saturados**
  - a) Determinar presión de poros.
  - b) Analizar efecto en cimentaciones.
  - c) Evaluar riesgo estructural.
14. **Sistema Hidrostático Complejo**
  - a) Determinar presión en puntos clave.
  - b) Analizar continuidad.
  - c) Evaluar equilibrio global.
15. **Compuerta Circular**
  - a) Determinar fuerza.
  - b) Hallar centro de presión.
  - c) Evaluar condiciones de falla.
16. **Diseño de Tanque**

- a) Determinar presión máxima.
  - b) Evaluar espesor requerido.
  - c) Aplicar factor de seguridad.
17. **Sistema de Elevación Hidráulico**
- a) Determinar fuerza requerida.
  - b) Evaluar eficiencia.
  - c) Analizar pérdidas.
18. **Flotación en Fluido Estratificado**
- a) Determinar empuje total.
  - b) Evaluar estabilidad.
  - c) Analizar distribución de fuerzas.
19. **Análisis de Presa**
- a) Determinar fuerza total.
  - b) Hallar momento en la base.
  - c) Evaluar estabilidad.
20. **Problema Integrador Final**
- a) Determinar presión en todo el sistema.
  - b) Calcular fuerzas hidrostáticas.
  - c) Evaluar equilibrio estructural completo.



## 5. Superficies Sumergidas, Tensión y Capilaridad

### 5.0.1 Fuerza Hidrostática sobre Superficies Planas

La fuerza diferencial sobre un elemento de área:

$$d\vec{F} = -P\vec{n}dA \quad (5.0.1)$$

La fuerza total:

$$\vec{F} = - \int_A P\vec{n}dA \quad (5.0.2)$$

Si la superficie es plana y el fluido es homogéneo:

$$F = \rho gh_c A \quad (5.0.3)$$

donde  $h_c$  es la profundidad del centroide.

### 5.0.2 Demostración de la Fuerza Resultante

Partimos de:

$$F = \int_A P dA \quad (5.0.4)$$

Sustituyendo:

$$P = \rho gh \quad (5.0.5)$$

$$F = \rho g \int_A h dA \quad (5.0.6)$$

Definimos:

$$h_c = \frac{1}{A} \int_A h dA \quad (5.0.7)$$

Entonces:

$$F = \rho g h_c A \quad (5.0.8)$$

### 5.0.3 Centro de Presión

El punto donde actúa la fuerza resultante:

$$y_p = \frac{I_G}{y_c A} + y_c \quad (5.0.9)$$

### 5.0.4 Demostración del Centro de Presión

Momento respecto a la superficie libre:

$$M = \int_A P y dA \quad (5.0.10)$$

$$M = \rho g \int_A y^2 dA \quad (5.0.11)$$

Como:

$$F y_p = M \quad (5.0.12)$$

Entonces:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{\int_A y dA} \quad (5.0.13)$$

### 5.0.5 Superficies Inclinadas

Para una superficie inclinada:

$$F = \rho g h_c A \quad (5.0.14)$$

pero:

$$h_c = y_c \sin \theta \quad (5.0.15)$$

### 5.0.6 Fuerza sobre Superficies Curvas

Se descompone en:

- Componente horizontal:

$$F_H = \text{Fuerza sobre proyección vertical} \quad (5.0.16)$$

- Componente vertical:

$$F_V = \text{Peso del fluido sobre la superficie} \quad (5.0.17)$$

### 5.0.7 Demostración de la Fuerza sobre Superficies Curvas

Descomponemos:

- Componente horizontal:

$$F_H = \int_{A_v} P dA \quad (5.0.18)$$

- Componente vertical:

$$F_V = \int_V \rho g dV \quad (5.0.19)$$

#### Demostración:

La componente vertical es el peso del fluido sobre la superficie:

$$F_V = \rho g V \quad (5.0.20)$$

### 5.0.8 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Diseño de presas
- Compuertas hidráulicas
- Muros de contención
- Tanques y reservorios

### 5.0.9 Tensión Superficial

#### Definición

La tensión superficial es la fuerza por unidad de longitud:

$$\sigma = \frac{F}{L} \quad (5.0.21)$$

### 5.0.10 Demostración Energética

El trabajo necesario para aumentar el área:

$$dW = \sigma dA \quad (5.0.22)$$

Por lo tanto:

$$\sigma = \frac{dW}{dA} \quad (5.0.23)$$

**5.0.11 Presión en Superficies Curvas (Ley de Laplace)**

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.0.24)$$

Para una esfera:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \quad (5.0.25)$$

**5.0.12 Demostración de la Ley de Laplace**

Consideremos una superficie curva.

Equilibrio de fuerzas:

$$\Delta P \cdot A = \sigma \cdot L \quad (5.0.26)$$

Para una esfera:

$$A = \pi R^2, \quad L = 2\pi R \quad (5.0.27)$$

Entonces:

$$\Delta P \cdot \pi R^2 = \sigma \cdot 2\pi R \quad (5.0.28)$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \quad (5.0.29)$$

**5.0.13 Capilaridad****Definición**

Fenómeno por el cual un fluido asciende o desciende en un tubo delgado debido a la tensión superficial.

**5.0.14 Ecuación de Capilaridad**

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad (5.0.30)$$

donde:

- $r$  es el radio del tubo
- $\theta$  es el ángulo de contacto

### 5.0.15 Demostración de la Capilaridad

Equilibrio de fuerzas:

- Fuerza por tensión superficial:

$$F_{\sigma} = 2\pi r\sigma \cos \theta \quad (5.0.31)$$

- Peso del fluido:

$$W = \rho g \pi r^2 h \quad (5.0.32)$$

Igualando:

$$2\pi r\sigma \cos \theta = \rho g \pi r^2 h \quad (5.0.33)$$

Simplificando:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad (5.0.34)$$

### 5.0.16 Capilaridad (Forma Vectorial)

La fuerza de tensión superficial es tangencial al contorno:

$$d\vec{F}_{\sigma} = \sigma d\vec{l} \quad (5.0.35)$$

Componente vertical:

$$F_{\sigma,z} = \int \sigma \cos \theta dl \quad (5.0.36)$$

Para un tubo:

$$F_{\sigma,z} = 2\pi r\sigma \cos \theta \quad (5.0.37)$$

### 5.0.17 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Ascenso capilar en suelos (humedad en cimentaciones)
- Diseño de materiales porosos
- Drenaje y filtración
- Problemas de humedad en edificaciones

## 5.1 Ejercicios Propuestos para la casa: Superficies Sumergidas, Tensión Superficial y Capilaridad

Indicaciones:

- Resolver **a mano**, con desarrollo completo.
- Justificar cada ecuación desde principios físicos.
- Usar formulación vectorial cuando corresponda.
- Incluir diagramas (fuerzas, presión, superficies).
- Entregar en **hojas cuadriculadas**.

1. **Fuerza Hidrostática Vectorial**
  - a) Partiendo de  $\vec{F} = -\int_A P\vec{n}dA$ , demostrar la expresión escalar.
  - b) Determinar la dirección de la fuerza resultante.
  - c) Analizar el efecto de una superficie inclinada.
2. **Tensor de Esfuerzos en Fluido**
  - a) Demostrar que  $\sigma = -P\mathbf{I}$ .
  - b) Calcular el vector de tracción.
  - c) Interpretar físicamente cada componente.
3. **Centro de Presión Vectorial**
  - a) Derivar  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ .
  - b) Determinar  $\vec{r}_{cp}$ .
  - c) Comparar con la solución escalar.
4. **Superficie Inclinada**
  - a) Determinar la fuerza total.
  - b) Hallar el centro de presión.
  - c) Evaluar el momento respecto a la base.
5. **Superficie Curva**
  - a) Determinar  $F_H$  y  $F_V$ .
  - b) Calcular la resultante.
  - c) Analizar estabilidad estructural.
6. **Distribución de Presión**
  - a) Derivar  $P = \rho gh$  desde  $\nabla P$ .
  - b) Graficar distribución.
  - c) Interpretar físicamente.
7. **Momento Hidrostático**
  - a) Calcular momento respecto a un eje.
  - b) Determinar punto de aplicación.
  - c) Analizar condiciones de equilibrio.
8. **Compuerta Hidráulica**
  - a) Determinar fuerza total.
  - b) Hallar centro de presión.
  - c) Diseñar sistema de soporte.
9. **Presa**
  - a) Calcular empuje total.
  - b) Determinar momento en la base.
  - c) Evaluar estabilidad.
10. **Tensión Superficial**
  - a) Derivar  $\sigma = \frac{F}{L}$ .
  - b) Analizar energía superficial.
  - c) Aplicar a sistemas reales.
11. **Ley de Laplace**
  - a) Demostrar  $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$ .
  - b) Aplicar a una gota.
  - c) Analizar estabilidad.
12. **Capilaridad**
  - a) Derivar  $h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho gr}$ .
  - b) Evaluar efecto del radio.
  - c) Aplicar a suelos.
13. **Ascenso Capilar en Suelos**

- a) Determinar altura de ascenso.
  - b) Analizar impacto en cimentaciones.
  - c) Evaluar soluciones de drenaje.
14. **Interfaz Fluido-Sólido**
- a) Analizar ángulo de contacto.
  - b) Determinar fuerzas.
  - c) Interpretar comportamiento físico.
15. **Fluido en Geometría Compleja**
- a) Determinar campo de presión.
  - b) Calcular fuerzas.
  - c) Analizar distribución.
16. **Análisis Energético**
- a) Relacionar presión con energía.
  - b) Aplicar a superficies.
  - c) Interpretar resultados.
17. **Sistema Hidrostático Complejo**
- a) Determinar fuerzas en múltiples superficies.
  - b) Calcular momentos.
  - c) Evaluar equilibrio global.
18. **Diseño Estructural**
- a) Determinar cargas hidrostáticas.
  - b) Diseñar sección resistente.
  - c) Aplicar factor de seguridad.
19. **Interacción Fluido-Estructura**
- a) Modelar fuerzas.
  - b) Analizar estabilidad.
  - c) Evaluar riesgo de falla.
20. **Problema Integrador Final**
- a) Determinar campo de presión completo.
  - b) Calcular fuerzas y momentos.
  - c) Evaluar estabilidad total del sistema.





## 6. Viscosidad, Continuidad y Ecuación de Bernoulli

### 6.0.1 Viscosidad

#### Definición

La viscosidad es la propiedad de un fluido que mide su resistencia al movimiento relativo entre capas.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.0.1)$$

donde:

- $\tau$  es el esfuerzo cortante
- $\mu$  es la viscosidad dinámica
- $\frac{du}{dy}$  es el gradiente de velocidad

### 6.0.2 Principio de Viscosidad de Newton

#### Formulación Tensorial

$$\tau = \mu \left( \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right) \quad (6.0.2)$$

#### Interpretación:

- La viscosidad depende de la deformación del fluido
- Es proporcional al gradiente de velocidad

### 6.0.3 Demostración (Flujo entre Placas)

Consideremos dos placas paralelas:

- Placa inferior fija
- Placa superior con velocidad  $U$

Perfil lineal:

$$u(y) = \frac{U}{h}y \quad (6.0.3)$$

Gradiente:

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h} \quad (6.0.4)$$

Entonces:

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \quad (6.0.5)$$

#### 6.0.4 Ecuación de Continuidad Forma General

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (6.0.6)$$

#### 6.0.5 Demostración

Conservación de masa:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (6.0.7)$$

Aplicando teorema de Gauss:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right) dV = 0 \quad (6.0.8)$$

Entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (6.0.9)$$

#### 6.0.6 Demostración Diferencial de la Continuidad (Forma Expandida)

Expandiendo el operador divergencia:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \quad (6.0.10)$$

Entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (6.0.11)$$

### 6.0.7 Caso Incompresible

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (6.0.12)$$

### 6.0.8 Caudal o Gasto

**Definición**

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (6.0.13)$$

Para flujo uniforme:

$$Q = VA \quad (6.0.14)$$

### 6.0.9 Demostración

Flujo volumétrico:

$$dQ = \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (6.0.15)$$

Integrando:

$$Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (6.0.16)$$

### 6.0.10 Ecuación de Bernoulli

**Forma General**

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \quad (6.0.17)$$

### 6.0.11 Demostración de Bernoulli desde Trabajo-Energía

Consideremos una partícula de fluido en movimiento.

Trabajo de fuerzas de presión:

$$\delta W = -dP \cdot \frac{1}{\rho} \quad (6.0.18)$$

Cambio de energía cinética:

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) \quad (6.0.19)$$

Cambio de energía potencial:

$$d(gz) \quad (6.0.20)$$

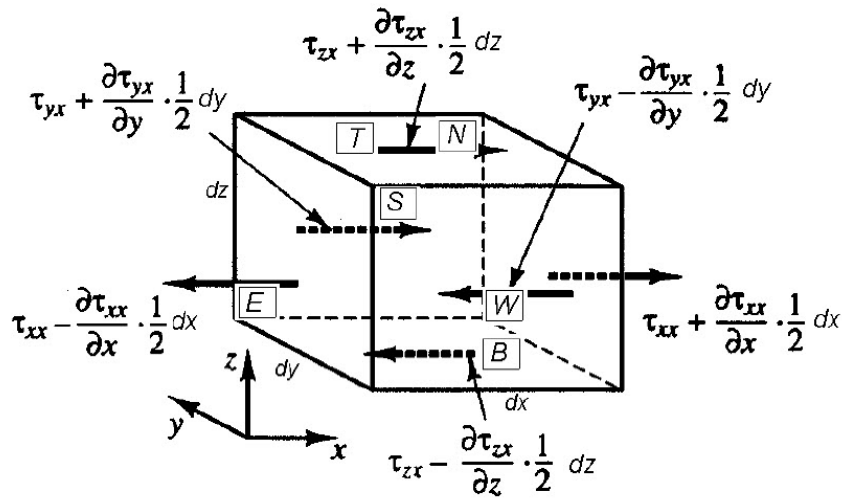


Figura 6.0.1: fluido Navier-Stokes

Aplicando conservación de energía:

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{dP}{\rho} + gdz = 0 \quad (6.0.21)$$

Integrando:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = C \quad (6.0.22)$$

### 6.0.12 Demostración desde Navier-Stokes (Flujo Ideal)

Ecuación de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad (6.0.23)$$

Para flujo estacionario y sin viscosidad:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} \quad (6.0.24)$$

Usando identidad:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad (6.0.25)$$

Entonces:

$$\nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(gz) = 0 \quad (6.0.26)$$

Integrando:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = C \quad (6.0.27)$$

### 6.0.13 Ley de Poiseuille

Para flujo laminar en tubería:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} \quad (6.0.28)$$

### 6.0.14 Demostración

Partimos de equilibrio:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = \frac{dP}{dx} \quad (6.0.29)$$

Sustituyendo  $\tau = \mu \frac{du}{dr}$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r\mu \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (6.0.30)$$

Integrando:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) \quad (6.0.31)$$

Caudal:

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr \quad (6.0.32)$$

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} \quad (6.0.33)$$

### 6.0.15 Demostración del Caudal desde la Continuidad

Para flujo incompresible:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (6.0.34)$$

Integrando sobre un volumen:

$$\int_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (6.0.35)$$

Esto implica conservación del caudal:

$$Q_1 = Q_2 \quad (6.0.36)$$

### 6.0.16 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Flujo en tuberías
- Sistemas de agua potable
- Canales hidráulicos
- Diseño de drenajes

## 6.1 Ejercicios Propuestos Avanzados: Hidrodinámica

### Indicaciones:

- Resolver **a mano** con desarrollo completo.
- Justificar cada ecuación desde principios físicos.
- Aplicar formulación vectorial cuando corresponda.
- Incluir diagramas (líneas de flujo, perfiles de velocidad, etc.).
- Entregar en **hojas cuadrículadas**.

#### 1. Flujo entre Placas (Viscosidad)

- a) Derivar el perfil de velocidad.
- b) Calcular el esfuerzo cortante.
- c) Analizar la distribución de velocidades.

#### 2. Ley de Newton de Viscosidad

- a) Demostrar  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ .
- b) Interpretar físicamente  $\mu$ .
- c) Analizar efectos de temperatura.

#### 3. Continuidad General

- a) Derivar la ecuación desde conservación de masa.
- b) Expresar en forma vectorial.
- c) Aplicar a flujo no estacionario.

#### 4. Flujo Incompresible

- a) Demostrar  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ .
- b) Aplicar a un campo dado.
- c) Verificar conservación de masa.

#### 5. Caudal en Conductos

- a) Derivar  $Q = \int_A \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ .
- b) Evaluar para velocidad no uniforme.
- c) Comparar con caso uniforme.

#### 6. Bernoulli (Energía)

- a) Derivar desde trabajo-energía.
- b) Aplicar entre dos puntos.
- c) Interpretar términos.

#### 7. Bernoulli Vectorial

- a) Derivar desde Navier-Stokes.
- b) Analizar flujo irrotacional.
- c) Evaluar condiciones de validez.

---

**8. Flujo en Tubería**

- a) Aplicar continuidad.
- b) Aplicar Bernoulli.
- c) Determinar presión.

---

**9. Poiseuille**

- a) Derivar el perfil parabólico.
- b) Calcular caudal.
- c) Analizar dependencia con radio.

---

**10. Perfil de Velocidad**

- a) Determinar  $u(r)$ .
- b) Graficar distribución.
- c) Evaluar velocidad máxima.

---

**11. Reynolds**

- a) Calcular número de Reynolds.
- b) Clasificar flujo.
- c) Analizar transición.

---

**12. Energía en Flujo**

- a) Interpretar términos de Bernoulli.
- b) Evaluar energía total.
- c) Analizar pérdidas.

---

**13. Sistema de Tuberías**

- a) Determinar caudal.
- b) Evaluar presión.
- c) Analizar eficiencia.

---

**14. Flujo Variable**

- a) Aplicar continuidad.
- b) Evaluar aceleración.
- c) Interpretar físicamente.

---

**15. Campo de Velocidad**

- a) Verificar continuidad.
- b) Calcular aceleración.
- c) Analizar flujo.

---

**16. Flujo en Canales**

- a) Determinar caudal.
- b) Aplicar Bernoulli.
- c) Evaluar condiciones hidráulicas.

---

**17. Interacción Fluido-Energía**

- a) Relacionar presión y velocidad.
- b) Analizar cambios de energía.

- c) Evaluar eficiencia.

---

18. **Flujo con Gradiente de Presión**

- a) Derivar ecuación.
- b) Resolver perfil.
- c) Interpretar resultados.

---

19. **Sistema Hidrodinámico Complejo**

- a) Determinar campo de presión.
- b) Calcular caudales.
- c) Evaluar estabilidad.

---

20. **Problema Integrador Final**

- a) Aplicar continuidad.
- b) Aplicar Bernoulli.
- c) Evaluar viscosidad y pérdidas.



## Bibliografía

### Books

#### 6.2 Bibliografía Recomendada

- FOX, R.W., McDONALD, A.T. y PRITCHARD, P.J. (2015) *Introduction to Fluid Mechanics*. 8ª edición. Wiley. Capítulos 1–7
  
- WHITE, F.M. (2016) *Fluid Mechanics*. 8ª edición. McGraw-Hill. Capítulos 2–8
  
- MUNSON, B.R., YOUNG, D.F. y OKIISHI, T.H. (2013) *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 7ª edición. Wiley. Capítulos 3–9
  
- ÇENGEL, Y.A. y CIMBALA, J.M. (2014) *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. 3ª edición. McGraw-Hill. Capítulos 4–10
  
- POTTER, M.C. y WIGGERT, D.C. (2011) *Mechanics of Fluids*. 4ª edición. Cengage Learning. Capítulos 5–9
  
- KUNDU, P.K., COHEN, I.M. y DOWLING, D.R. (2015) *Fluid Mechanics*. 6ª edición. Academic Press. Capítulos 2–6
  
- 
- CHOW, V.T. (1959) *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill. Capítulos 1–6

- HENDERSON, F.M. (1966) *Open Channel Flow*. Macmillan. Capítulos 2–7
- STREETER, V.L., WYLIE, E.B. y BEDFORD, K.W. (1998) *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill. Capítulos 3–7

—

- HUAYANAY VILLAR, J.L. y MENESES HIYO, S.Y. (2024) *Diseño y construcción de un sistema inteligente de control de bombas de agua en cultivo de fresas (Fragaria)*. Revista de Investigación Científica de la UNF – Aypate, 2(4), 24–35.

DOI: 10.57063/ricay.v2i4.66

- HUAYANAY VILLAR, J.L. y CUNHA, J.P.V.S. (2022) *Sliding-Mode Controllers for Soil Moisture Modeled by Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations*. IEEE Variable Structure Systems (VSS).

DOI: 10.1109/VSS57184.2022.9902067

- HUAYANAY VILLAR, J.L. (2024) *Seguimiento de trayectoria en robótica móvil con alimentación de energía solar*. Revista de Investigación Científica de la UNF – Aypate, 2(4), 1–12.

DOI: 10.57063/ricay.v2i4.64