



EL MÉTODO DE EULER FRACCIONAL EN LA SOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN FRACCIONARIO.

THE FRACTIONAL EULER METHOD IN THE APPROXIMATE SOLUTION OF FRACTIONAL ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Daúl Andrés Paiva Yanayaco¹

¹Programa: MATEMÁTICA, Área: MODELAMIENTO MATEMÁTICO, Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga

Correo corresponsal: daulpaivay@gmail.com

INFORMACION DE ARTICULO

Artículo historial:

Recibido 01 de enero 2026

Recibido por formulario 13 febrero 2026

Aceptado 22 febrero 2026

Avaluado online 22 febrero 2026

Palabras clave:

Derivadas e integrales fraccionarias, ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, regla del trapecio modificada.

RESUMEN

El propósito de esta investigación es presentar una alternativa numérica para resolver ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, pues éstas modelan mejor los fenómenos que aparecen en física y otras ramas de la ciencia. Una de las herramientas que ha sido de gran ayuda para este trabajo de investigación ha sido la Regla del Trapecio Modificada, así como la fórmula de Taylor Generalizada. Se ha elaborado un programa en Matlab para hacer las comparaciones entre las soluciones exactas y las aproximadas.

ABSTRACT

The purpose of this research is to present a numerical alternative for solving fractional-order differential equations, as these better model the phenomena that appear in physics and other branches of science. One of the tools that has been of great help in this research has been the Modified Trapezoidal Rule, as well as the Generalized Taylor Formula. A program has been developed in Matlab to compare the exact and approximate solutions.



1. Introducción

En este trabajo de investigación se presenta un algoritmo para la solución numérica de problemas de valor inicial de la forma

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), y(0) = y_0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (1)$$

donde D_*^α denota el operador diferencial fraccional de Caputo [1]. El desarrollo de este algoritmo está motivada por las pocas aplicaciones clásicas y muchas recientes ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Entre los problemas clásicos tenemos el modelado del comportamiento de los materiales viscoelásticos en mecánica [2]. Más recientemente, el cálculo fraccional se ha aplicado a la mecánica continua y la mecánica estadística para los problemas de viscoelasticidad, el movimiento browniano y las ecuaciones de onda de difusión fraccionarios y muchos fenómenos físicos [3].

Algunos métodos numéricos ya se han presentado para ecuaciones diferenciales fraccionarias en la literatura [4]. Sin embargo muchos de estos métodos se utilizan para tipos muy específicos de ecuaciones diferenciales, a menudo sólo ecuaciones lineales o incluso las clases más pequeñas. Recientemente, Diethelm et al. [4] presentó un método para la solución numérica de la ecuación diferencial fraccionaria no lineal (1) que puede ser interpretada como una generalización del esquema clásico de Adams-Bashforth-Moulton para ecuaciones diferenciales de quinto orden.

Daremos algunas definiciones básicas y luego estudiaremos el método de Euler Fraccionario que junto con la Regla del Trapecio Modificada nos ayudarán a hallar la aproximación a la solución exacta [5].

2. Materiales y Métodos

En esta investigación las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario que se han trabajado han sido de tal manera que podemos aplicar el Método de Euler Fraccional, para ello tenemos que tener una condición inicial, es decir que ese método se aplicará a problemas de valor inicial. Puesto que en dichas ecuaciones diferenciales aparecen derivadas e integrales de orden fraccionario, éstas se aproximarán mediante la regla del trapecio modificada. Trabajamos con algunos ejemplos donde la variable independiente es $[0, a]$, $a > 0$. El problema del valor inicial que se ha trabajado es

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, 0 < \alpha \leq 1$$

El intervalo de trabajo es $[0, a]$, $a > 0$ el cual se dividirá en subintervalos con tamaño de paso h constante.

A continuación presentamos algunas definiciones y teoremas que nos ayudarán en nuestro trabajo.

Recordamos el concepto de derivada fraccional dada por la definición de Caputo la cual es una modificación de la definición de Riemann-Liouville y tiene una ventaja que puede trabajar con problemas de valor inicial en las cuales las condiciones iniciales están dadas en términos del campo de variables y su orden de integración el cual es el caso de muchos procesos físicos.

- **Funciones de clase C_μ**

Una función real $f(x)$, $x > 0$, se dice que es del espacio C_μ , $\mu \in \mathbb{R}$, si existe un número real $p (> \mu)$, tal que $f(x) = x^p f_1(x)$, donde $f_1(x) \in C[0, \infty)$, se dice está en el espacio C_μ^m sí y sólo si $f^{(m)} \in C_\mu^m$, $m \in \mathbb{N}$.

- **Operador Integral Fraccional de Riemann-Liouville de orden α**

Para una función C_μ , $\mu \geq -1$, es definida como

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x(x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (2)$$

$\alpha > 0, x > 0$, donde $J^0 f(x) = f(x)$.

- **Derivada de en el sentido de Caputo**

La derivada fraccional de $f(x)$ en el sentido de Caputo es definido como

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(x) &= J^{m-\alpha} D^m f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x x(x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

para $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, x > 0, f \in C_{-1}^m$.

Introducimos una nueva generalización de la fórmula de Taylor que involucra la derivada fraccional de Caputo. Esta generalización es dada en [5].

- **Teorema generalizado del valor medio**

Supongamos que $f(x) \in C[0, a]$ y $D_*^\alpha f(x) \in C[0, a]$, para $0 < \alpha \leq 1$. Entonces tenemos

$$f(x) = f(0+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (D_*^\alpha f)(\xi) x^\alpha, \quad (4)$$

con $0 \leq \xi \leq x, \forall x \in (0, a]$.

- **Fórmula Generalizada de Taylor**

Supongamos que $D_*^\alpha f(x) \in C(0, a]$ para $k = 0, 1, \dots, n+1$, donde $0 < \alpha \leq 1$. Entonces tenemos



$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} (D_*^\alpha)(0+) + \frac{(D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} x^{(n+1)\alpha} \quad (5)$$

donde $0 \leq \xi \leq x, \forall x \in \langle 0, a \rangle$.

• **Regla del Trapecio Modificado**

Supóngase que el intervalo $[0, a]$ es subdividido en k subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$ de igual longitud $h = a/k$. Usando los nodos $x_j = jh$ para $j = 0, 1, \dots, k$, la **Regla del Trapecio Modificado** [1]

$$T(f, h, \alpha) = \omega_2 \left[\left(r_{k,1}^{\alpha+1} - r_{k,\alpha+1} k^\alpha \right) f(0) + f(a) + \sum_{j=1}^{k-1} v_{k,j} f(x_j) \right] \quad (6)$$

donde

$$\omega_2 = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + z)}, \quad r_{k,s} = k - s,$$

$$v_{k,j} = r_{k,j-1}^{\alpha+1} - 2r_{k,j}^{\alpha+1} + r_{k,j+1}^{\alpha+1}.$$

es una aproximación para la integral fraccionaria

$$(J^\alpha f(x))(a) = T(f, h, \alpha) - E_T(f, h, \alpha) \quad (7)$$

con $a > \alpha > 0$.

• **Método de Euler Fraccional**

El método de Euler fraccional se desarrolla para hallar la solución numérica del problema de valor inicial con derivadas de Caputo. Este método es una generalización del método de Euler clásico.

Consideremos el problema de valor inicial,

$$D_*^\alpha y(t) = \mathbf{f}(t, y(t)), y(0) = y_0, 0 < \alpha \leq 1, t > 0 \quad (8)$$

Sea $[0, a]$ el intervalo sobre el cual queremos hallar la solución del problema (8), $y(t)$, que satisface el problema de valor inicial (8).

Generamos un conjunto de puntos $\{(t_j, y(t_j))\}$ que serán usados para la aproximación. Subdividimos el intervalo $[0, a]$ en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ de igual tamaño de paso $h = a/k$, los nodos a usar son $t_j = jh$, para $j = 0, 1, \dots, k$.

Asumiremos que $y(t), D_*^\alpha y(t)$ y $D_*^{2\alpha} y(t)$ son continuas en $[0, a]$ y usamos la generalización de la fórmula de Taylor (5)

para expandir $y(t)$ cerca de $t = t_0 = 0$. Para cada valor de t existe un valor c_1 tal que

$$y(t) = y(t_0) + (D_*^\alpha y(t))(t_0) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(c_1) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \quad (9)$$

Cuando $(D_*^\alpha y(t))(t_0) = \mathbf{f}(t_0, y(t_0))$ y $h = t_1$ se sustituyen en la ecuación (8) el resultado es una expresión para $y(t_1)$:

$$y(t_1) = y(t_0) + \mathbf{f}(t_0, y(t_0)) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(c_1) \frac{h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \quad (10)$$

Si el tamaño de paso h es escogido adecuadamente pequeño, entonces el término de la derivada de orden 2α (que involucra a $h^{2\alpha}$) se anula y obtenemos

$$y(t_1) = y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \mathbf{f}(t_0, y(t_0)) \quad (11)$$

El proceso es repetido y genera una sucesión de puntos que aproxima la solución de $y(t)$.

La fórmula general para el Método de Euler Fraccional es:

$$\begin{cases} t_{j+1} = t_j + h, \\ y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \mathbf{f}(t_j, y(t_j)), \end{cases} \quad (12)$$

para $j = 0, 1, \dots, k - 1$. Si $\alpha = 1$, entonces el método de Euler Fraccional (12) se reduce al método clásico de Euler.

• **Algoritmo para el Método de Euler Fraccional**

Aquí derivamos el algoritmo fundamental para la solución numérica del problema de valor inicial (8). El algoritmo está basado en la regla del trapecio modificada y el método de Euler Fraccionario. Nuestra aproximación depende de la propiedad analítica del problema de valor inicial (8) y es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = J^\alpha \mathbf{f}(t, y(t)) + y(0) \quad (13)$$

Sea el intervalo $[0, a]$ sobre el cual se quiere hallar la aproximación a la solución. Supongamos que el intervalo $[0, a]$ es subdividido en k subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$ de igual longitud $h = a/k$ usando los nodos $t_j = jh$, para $j = 0, 1, \dots, k$. Para obtener el punto solución $(t_1, y(t_1))$, sustituimos $t = t_1$ en (12) y obtenemos

$$y(t_1) = (J^\alpha \mathbf{f}(t, y(t))) (t_1) + y(0) \quad (14)$$



Ahora usando la regla del trapecio modificada (6) para aproximar $(J^\alpha f(t, y(t)))(t_1)$ con $h = t_1 - t_0$, entonces el resultado es

$$y(t_1) = \alpha \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) + y_0 \quad (15)$$

Donde $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, y(t_0))$ y $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_1, y(t_1))$.

Observamos que el lado derecho de la fórmula (15) involucra el término $y(t_1)$. Así que estimaremos este valor. Para ello emplearemos el método de Euler Fraccional. Sustituimos (11) en (15) y obtenemos

$$y(t_1) = w_2 [\alpha \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}(t_1, y(t_0) + w_1 \mathbf{f}_0)] + y(0) \quad (16)$$

donde

$$w_z = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + z)}, \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, y(t_0)), \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(t_k, y(t_k))$$

El proceso se repite para generar una sucesión de puntos que se aproximan a la solución $y(t)$. En cada paso, el método de Euler Fraccional se usa como una predicción, y la regla del trapecio modificada hace la corrección para obtener un valor finito. La fórmula general del algoritmo es:

$$y_j = w_2 \left[\left(r_{j,1}^{\alpha+1} - r_{j,\alpha+1} \cdot j^\alpha \right) \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^{j-1} v_{j,i} \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}(t_j, y_{j-1} + w_1 \mathbf{f}_{j-1}) \right] + y_0 \quad (17)$$

donde $y_j = y(t_j)$.

3. Resultados

El algoritmo propuesto (17) se aplicará a tres ejemplos diferentes de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

- **Ejemplo Numérico 1.**

Consideremos la ecuación lineal homogénea

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \quad t > 0 \end{cases} \quad (18)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$.

La solución exacta de (18) es dada por

$$y(t) = E_\alpha(-t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (19)$$

que es la función de Mittag-Leffler de orden α . De acuerdo al algoritmo (17) obtenemos la siguiente fórmula de iteración

$$y_j = 1 - w_2 \left[\left(r_{j,1}^{\alpha+1} - r_{j,\alpha+1} \cdot j^\alpha + \sum_{i=1}^{j-1} v_{j,i} \cdot y_i - (w_1 - 1)y_{j-1} \right) \right] \quad (20)$$

En la Figura (1) se visualiza la gráfica de la solución exacta $y(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$, ($\alpha = 0.5, h = 0.001, a = 1$, color azul) y la aproximada de color rojo.

En la Tabla (1) se presenta resultados numéricos del Ejemplo Numérico 1 cuando $\alpha = 0.5, 0.75$ y 1 con $h = 0.001$.

Los errores absolutos cuando $\alpha = 0.5$ y diferentes valores del tamaño de paso h se dan en la Tabla (2). Como se puede observar, la precisión puede ser más aceptable si usamos valores más pequeños de h .

- **Ejemplo Numérico 2**

Este segundo ejemplo es una ecuación lineal no homogénea.

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - y(t) + t^2 - t, \\ y(0) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$.

La solución exacta de (21) es $y(t) = t^2 - t$.

La ecuación lineal (21) es desarrollada por Diethelm et al. [4] usando el método de Adams-Bashforth-Moulton fraccional. La Tabla (3) muestra la solución exacta y la aproximada de la ecuación (21) usando el algoritmo (17) para diferentes valores de α .

- **Ejemplo Numérico 3.**

Este tercer ejemplo es una ecuación no lineal.

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) = (y(t))^2 - \frac{2}{(t+1)^2}, \\ y(0) = -2, \quad t > 0 \end{cases} \quad (22)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$.

La solución exacta de (22) cuando $\alpha = 1$ es

$$y(t) = -\frac{2}{(t + 1)}$$

La Tabla (4) muestra las soluciones aproximadas de la ecuación (22) para diferentes valores de α usando el algoritmo (17). El valor $\alpha = 1$ es el único caso para el cual se conoce la solución exacta

$$\square(\square) = -\frac{2}{(\square + 1)}$$

y nuestra solución aproximada en este caso está muy cercana con la solución exacta.

Tabla 2: Errores absolutos del Ejemplo 1 cuando $\alpha = 0.5$ y con varios valores del tamaño de paso h .

t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	$h = 0.0001$
0.0	0.0000e-00	0.0000e-00	0.0000e-00	0.0000e-00
0.1	2.7642e-02	2.5504e-03	1.2841e-03	4.1574e-05
0.2	6.3532e-02	2.4222e-03	1.1042e-03	3.2673e-05
0.3	2.1765e-02	2.1647e-03	9.5509e-04	2.7271e-05
0.4	6.6783e-03	1.9368e-03	8.4009e-04	2.3510e-05
0.5	1.0867e-02	1.7463e-03	7.9939e-04	2.0697e-05
0.6	1.0016e-02	1.5871e-03	6.7599e-04	1.8494e-05
0.7	9.8945e-03	1.4526e-03	6.1530e-04	1.6713e-05
0.8	9.4682e-03	1.3377e-03	5.6423e-04	1.5231e-05
0.9	9.0545e-03	1.2381e-03	5.2061e-04	1.3995e-05
1.0	8.6295e-03	1.1521e-03	4.8291e-04	1.2932e-05

Tabla 3: Valores numéricos del Ejemplo 2 cuando $\alpha = 0.5, 0.75$ y 1 con $h = 0.001$.

t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.0$	
	y_{Aprox}	y_{Exact}	y_{Aprox}	y_{Exact}	y_{Aprox}	y_{Exact}
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	-0.089804	-0.090000	-0.089921	-0.090000	-0.089555	-0.090000
0.2	-0.159788	-0.160000	-0.159942	-0.160000	-0.159590	-0.160000
0.3	-0.209807	-0.210000	-0.209954	-0.210000	-0.209629	-0.210000
0.4	-0.239842	-0.240000	-0.239963	-0.240000	-0.239664	-0.240000
0.5	-0.249893	-0.250000	-0.249971	-0.250000	-0.249696	-0.250000
0.6	-0.239953	-0.240000	-0.239977	-0.240000	-0.239725	-0.240000
0.7	-0.210019	-0.210000	-0.209982	-0.210000	-0.209751	-0.210000
0.8	-0.160091	-0.160000	-0.159987	-0.160000	-0.159775	-0.160000
0.9	-0.090168	-0.090000	-0.089991	-0.090000	-0.089796	-0.090000
1.0	-0.000249	0.000000	-0.000005	0.000000	-0.000184	0.000000

• Figuras

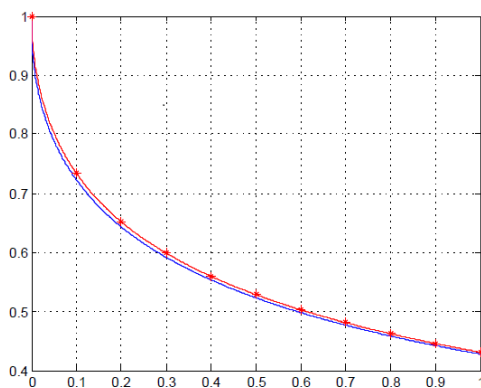


Figura 1: Solución exacta y aproximada de Ejemplo 1, $\alpha = 0.5, h = 0.001$.

• Tablas

Tabla 1: Valores numéricos del Ejemplo 1 cuando $\alpha = 0.5, 0.75$ y 1 con $h = 0.001$.

t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1.0$	
	y_{Aprox}	y_{Exact}	y_{Aprox}	y_{Exact}	y_{Aprox}	y_{Exact}
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.723955	0.723578	0.828254	0.828251	0.904837	0.904837
0.2	0.644094	0.643788	0.732588	0.732585	0.818730	0.818731
0.3	0.592277	0.592018	0.660341	0.660337	0.740817	0.740818
0.4	0.553831	0.553606	0.602124	0.602121	0.670319	0.670320
0.5	0.523355	0.523157	0.553605	0.553603	0.606530	0.606531
0.6	0.498203	0.498025	0.512287	0.512285	0.548811	0.548812
0.7	0.476864	0.476703	0.476556	0.476555	0.496585	0.496585
0.8	0.458394	0.458246	0.445293	0.445292	0.449328	0.449329
0.9	0.442157	0.442021	0.417683	0.417682	0.406569	0.406570
1.0	0.427709	0.427584	0.393109	0.393108	0.367079	0.367079

Tabla 4: Valores numéricos del Ejemplo 3 cuando $h = 0.001$.

t	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1.0$
0.0	-2.00000	-2.00000	-2.00000	-2.00000	-2.00000
0.1	-1.57191	-1.58885	-1.56451	-1.73541	-1.81818
0.2	-1.48646	-1.48991	-1.53362	-1.59189	-1.66666
0.3	-1.42059	-1.41460	-1.44369	-1.48262	-1.53846
0.4	-1.36655	-1.35254	-1.36994	-1.39284	-1.42857
0.5	-1.32108	-1.29978	-1.30711	-1.31637	-1.33333
0.6	-1.28222	-1.25413	-1.25246	-1.24987	-1.25000
0.7	-1.24861	-1.21415	-1.20427	-1.19122	-1.17647
0.8	-1.21926	-1.17879	-1.16136	-1.13896	-1.11111
0.9	-1.19341	-1.14725	-1.12283	-1.09202	-1.05263
1.0	-1.17049	-1.11893	-1.08802	-1.04957	-0.99999

4. Discusión

De acuerdo a los resultados obtenidos, este método de Euler fraccionario junto con la regla del trapecio modificada, nos han permitido elaborar un algoritmo en MatLab ello fue posible porque hemos usado también la definición de la derivada dada según Caputo.

Los resultados obtenidos se asemejan a los que aparecen en [5]. Además para obtener una precisión más aceptable se debe reducir el tamaño de paso.

5. Agradecimientos:

Un agradecimiento especial a la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por el apoyo financiero que se ha otorgado para poder realizar este trabajo

**VILLA**
AUTOMATION

Revista Internacional de Ciencias Avanzadas, Astrodinámica y Teledetección - JICAAT

<https://villautomation.net/revistacientifica.html>

Depósito Legal: 2026-03221

de investigación. De igual manera a la Revista JICAAT de Villa Automation SAC

6. Referencias Bibliográficas

[1] **M. Caputo.**, (1967). *Lineal models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II.* J. Roy. Astr. Soc. **13**, 529-539.

[2] **P.T. Torvik** y **R.L. Bagley**, (1996). *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials.* J. Appl. Mech. **51**, 294-298.

[3] **F. Huang** y **F. Liu**, (2005). *The fundamental solution of the space-time fractional advection-dispersion equation.* J. Appl. Math. and Computing **18**(2), 339-350.

[4] **K. Diethelm**, **N. Ford**, **A. Freed**. (2004). *Detailed error analysis for a fractional Adams method*, Numer. Algorithms, 36, 31-52

[5] **Z. Odibat.**, (2006). *Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives*, Applied Mathematics and Computation, 178, 527-533.

[6] **I. Podlubny**, (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press.