SEMINARIO SOLUCIONARIO

Problema 1.1

Datos

$$A = 3{,}5\,m^2, \qquad L_0 = 5\,m, \qquad E = 2{,}5\times 10^{10}\ Pa$$

La carga axial aplicada a la columna es

$$F(t) = 80\,(1+0{,}1\,t)\,e^{-0{,}05t}L_0$$

El esfuerzo normal está definido por

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{A}$$

y para un material elástico lineal:

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}$$

— (a) Demostrar que

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{E}$$

Partiendo de

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}$$

integramos entre los estados t_0 y t:

$$\int_{\varepsilon(t_0)}^{\varepsilon(t)} d\varepsilon = \frac{1}{E}\int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} d\sigma$$

obteniéndose

$$\varepsilon(t)-\varepsilon(t_0) = \frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{E}$$

Si se toma como referencia

$$\varepsilon(t_0) = 0,$$

entonces

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{E}}$$

que es la expresión solicitada. — (b) Interpretación física de la deformación longitudinal La deformación longitudinal representa el cambio relativo de longitud que experimenta la columna cuando se encuentra sometida a una carga axial.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Si $\varepsilon > 0$, la barra se alarga (tracción). Si $\varepsilon < 0$, la barra se acorta (compresión). En este problema la deformación varía con el tiempo debido a la naturaleza dinámica de la carga aplicada por las vibraciones de la maquinaria. — (c) Explique la relación constitutiva de Hooke La ley de Hooke para materiales elásticos lineales establece:

$$\boxed{\sigma(t) = E\,\varepsilon(t)}$$

donde: σ = esfuerzo normal (Pa). ε = deformación unitaria. E = módulo de Young. Esta relación indica que el esfuerzo es proporcional a la deformación mientras el material permanezca dentro de su rango elástico. — (d) Significado físico del módulo de Young El módulo de Young es una medida de la rigidez del material.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Cuanto mayor es E, más difícil resulta deformar el material. Para la columna:

$$E = 2{,}5 \times 10^{10}\ Pa$$

lo que indica una elevada resistencia a la deformación longitudinal. — (e) Energía de deformación unitaria La energía de deformación por unidad de volumen se define como

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon$$

Utilizando la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

entonces

$$U = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon \, d\varepsilon$$

$$U = E\left[\frac{\varepsilon^2}{2}\right]_0^{\varepsilon}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}E\varepsilon^2}$$

Como

$$\sigma = E\varepsilon,$$

también puede escribirse

$$\boxed{U = \frac{\sigma^2}{2E}}$$

—

Problema 1.2

Datos

- Esfuerzo admisible:

$$\sigma_{adm} = 500\ MPa$$

- Módulo de Young:

$$E = 200\ GPa$$

- Diámetro de cada barra:

$$d = 2\ cm = 0{,}02\ m$$

- Longitudes:

$$AD = 4\,m$$

$$DC = 3\,m$$

- ABC equilátero.

La sección transversal de cada elemento es:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A = \frac{\pi (0{,}02)^2}{4}$$

$$A = 3{,}1416 \times 10^{-4}\ m^2$$

—

a. Geometría de la armadura

La barra inclinada AC forma un triángulo rectángulo con:

$$AD = 4\,m$$

$$DC = 3\,m$$

Por Pitágoras:

$$AC = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$AC = 5\,m$$

Por simetría:

$$CB = 5\,m$$

La longitud total de la base es

$$AB = 6\,m$$

Las razones trigonométricas para las barras inclinadas son:

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

b. Método de los nudos

Se aplica una fuerza vertical F en el centro del elemento superior.

Por simetría:

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}$$

c.Nudo C

Las fuerzas en las barras AC y BC son iguales.

Sea N la fuerza axial.

Equilibrio vertical:

$$2N\sin\theta = F$$

$$2N\left(\frac{4}{5}\right) = F$$

$$N = \frac{5}{8}F$$

Por tanto:

$$\boxed{N_{AC} = N_{BC} = 0{,}625F}$$

Las barras AC y BC trabajan a compresión.

d.Nudo D

Equilibrio vertical:

$$N_{AD} = F$$

Por tanto:

$$\boxed{N_{AD} = F}$$

La barra vertical es la más solicitada.

e. Fuerza admisible máxima

La condición resistente es:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$N_{adm} = \sigma_{adm}A$$

Sustituyendo:

$$N_{adm} = (500 \times 10^6)(3{,}1416 \times 10^{-4})$$

$$N_{adm} = 157080\ N$$

$$N_{adm} = 157{,}1\ kN$$

Como la barra crítica es AD:

$$N_{AD} = F$$

entonces:

$$\boxed{F_{max} = 157{,}1\ kN}$$

4. Tipo de esfuerzo en cada elemento

Barra	Tipo de esfuerzo
AD	Compresión
AC	Compresión
BC	Compresión
AB	Tracción
DC	Compresión

5. Fuerza cortante y momento flector

Se analiza la barra superior DC.

La carga se aplica en el centro.

Longitud:

$$L = DC = 3m$$

Carga puntual centrada:

$$F$$

Las reacciones en D y C son:

$$R_D = R_C = \frac{F}{2}$$

Cortante

Para:

$$0 < x < 1{,}5m$$

$$V = \frac{F}{2}$$

Para:

$$1{,}5 < x < 3m$$

$$V = -\frac{F}{2}$$

Por tanto:

$$\boxed{V_{max} = \frac{F}{2}}$$

Sustituyendo F_{max}:

$$V_{max} = 78{,}54\, kN$$

Momento flector máximo

Para una carga puntual centrada:

$$M_{max} = \frac{FL}{4}$$

$$M_{max} = \frac{(157{,}1)(3)}{4}$$

$$\boxed{M_{max} = 117{,}8\ kN \cdot m}$$

6. Influencia de duplicar el diámetro

Si:

$$d' = 2d$$

entonces:

$$A' = \frac{\pi(2d)^2}{4}$$

$$A' = 4A$$

Como:

$$N_{adm} = \sigma_{adm} A$$

resulta:

$$N'_{adm} = 4N_{adm}$$

Por tanto:

$$F'_{max} = 4F_{max}$$

$$F'_{max} = 4(157{,}1)$$

$$\boxed{F'_{max} = 628{,}4\ kN}$$

Problema 3

Datos

$$\rho_1 = 1{,}0(1000) = 1000\ kg/m^3$$

$$\rho_2 = 0{,}8(1000) = 800\ kg/m^3$$

$$\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$$

$$g = 9{,}81\ m/s^2$$

$$H_{Hg} = 1{,}3\ m$$

La lectura manométrica se encuentra conectada al fluido de densidad relativa 1.

(a) Presión absoluta en P

La presión en el punto de conexión con el mercurio es

$$P_D = P_{atm} + \rho_{Hg} g H_{Hg}$$

$$P_D = 101325 + (13600)(9{,}81)(1{,}3)$$

$$P_D = 274{,}8\ kPa$$

Del esquema, el punto de conexión se encuentra a

$$0{,}8\,m$$

sobre el fondo mientras que la interfase P está a

$$4\,m$$

sobre el fondo.
Por tanto

$$\Delta h = 4 - 0{,}8 = 3{,}2\,m$$

Al ascender en el mismo fluido ($S_r = 1$)

$$P_P = P_D - \rho_1 g \Delta h$$

$$P_P = 274{,}8 - \frac{(1000)(9{,}81)(3{,}2)}{1000}$$

$$P_P = 243{,}4\ kPa$$

Por consiguiente

$$\boxed{P_P \approx 243{,}4\ kPa}$$

(absoluta)

(b) Fuerza horizontal sobre la compuerta ABC

La fuerza hidrostática horizontal sobre una superficie curva es igual a la fuerza ejercida sobre su proyección vertical.

Para la compuerta:

$$A_v = (AB)(L)$$

donde

$$AB = 2\,m$$

$$L = 4\,m$$

$$A_v = 8\,m^2$$

La fuerza horizontal resulta

$$F_H = \gamma \bar{h} A_v$$

donde $\bar{h}$ es la profundidad del centroide de la proyección vertical medida desde la superficie libre equivalente.

Por tanto

$$\boxed{F_H = \gamma \bar{h} A_v}$$

(c) Fuerza de apoyo en C

Para una superficie curva:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

donde

$$F_V$$

es igual al peso del volumen imaginario de líquido situado sobre la superficie curva.

Luego, aplicando equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

se obtiene la reacción en el apoyo C:

$$\boxed{R_C = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}}$$

si el peso de la compuerta es despreciable.

Problema 2

Un vehículo de inspección submarina (ROV) se desplaza verticalmente dentro del agua debido al empuje hidrostático generado por sus flotadores.

Datos

$$V = 0{,}153\, m^3$$

$$m = 80\, kg$$

$$\rho = 1000\, kg/m^3$$

$$g = 9{,}8\, m/s^2$$

Condiciones iniciales:

$$y(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

(a) Ecuación dinámica del movimiento

Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

El empuje hidrostático es

$$E = \rho g V$$

Sustituyendo:

$$E = (1000)(9{,}8)(0{,}153)$$

$$E = 1499{,}4\,N$$

El peso del vehículo es

$$W = mg$$

$$W = (80)(9{,}8)$$

$$W = 784\,N$$

La fuerza resultante es

$$F_R = E - W$$

$$F_R = 1499{,}4 - 784$$

$$F_R = 715{,}4\,N$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$80\,y'' = 715{,}4$$

$$\boxed{y'' = 8{,}94\,m/s^2}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial del movimiento es

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = 8{,}94}$$

(b) Demostrar que la solución de posición es

$$y(t) = 4{,}47t^2$$

Integrando la aceleración:

$$\frac{dy'}{dt} = 8{,}94$$

$$y'(t) = 8{,}94t + C_1$$

Usando la condición inicial

$$y'(0) = 0$$

se obtiene

$$C_1 = 0$$

Por tanto

$$y'(t) = 8{,}94t$$

Integrando nuevamente:

$$y(t) = \int 8{,}94t \, dt$$

$$y(t) = 4{,}47t^2 + C_2$$

Aplicando

$$y(0) = 0$$

resulta

$$C_2 = 0$$

Finalmente:

$$\boxed{y(t) = 4{,}47t^2}$$

(c) Demostrar que la velocidad es

$$v(t) = 8{,}94t$$

La velocidad es la derivada de la posición:

$$v(t) = \frac{dy}{dt}$$

Derivando:

$$v(t) = \frac{d}{dt}(4{,}47t^2)$$

$$\boxed{v(t) = 8{,}94t}$$

(d) Velocidad del vehículo en el instante $t = 5\,s$

Sustituyendo:

$$v(5) = 8{,}94(5)$$

$$\boxed{v(5) = 44{,}7\,m/s}$$

(e) Interpretación física

Como el empuje hidrostático es mayor que el peso del vehículo,

$$E > W$$

existe una fuerza neta ascendente constante:

$$F_R = 715{,}4\,N$$

Esto genera una aceleración constante:

$$a = 8{,}94\,m/s^2$$

Por ello:

- La velocidad aumenta linealmente con el tiempo.
- La posición aumenta de forma cuadrática.
- El movimiento corresponde a un MRUA vertical ascendente.

Problema 3

Datos

$$\rho_1 = 1{,}0(1000) = 1000\ kg/m^3$$

$$\rho_2 = 0{,}8(1000) = 800\ kg/m^3$$

$$\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$$

$$g = 9{,}81\ m/s^2$$

$$H_{Hg} = 1{,}3\ m$$

La lectura manométrica se encuentra conectada al fluido de densidad relativa 1.

(a) Presión absoluta en P

La presión en el punto de conexión con el mercurio es

$$P_D = P_{atm} + \rho_{Hg} g H_{Hg}$$

$$P_D = 101325 + (13600)(9{,}81)(1{,}3)$$

$$P_D = 274{,}8\,kPa$$

Del esquema, el punto de conexión se encuentra a

$$0{,}8\,m$$

sobre el fondo mientras que la interfase P está a

$$4\,m$$

sobre el fondo.
Por tanto

$$\Delta h = 4 - 0{,}8 = 3{,}2\,m$$

Al ascender en el mismo fluido ($S_r = 1$)

$$P_P = P_D - \rho_1 g \Delta h$$

$$P_P = 274{,}8 - \frac{(1000)(9{,}81)(3{,}2)}{1000}$$

$$P_P = 243{,}4\,kPa$$

Por consiguiente

$$\boxed{P_P \approx 243{,}4\,kPa}$$

(absoluta)

(b) Fuerza horizontal sobre la compuerta ABC

La fuerza hidrostática horizontal sobre una superficie curva es igual a la fuerza ejercida sobre su proyección vertical.

Para la compuerta:

$$A_v = (AB)(L)$$

donde

$$AB = 2\,m$$

$$L = 4\,m$$

$$A_v = 8\,m^2$$

La fuerza horizontal resulta

$$F_H = \gamma \bar{h} A_v$$

donde $\bar{h}$ es la profundidad del centroide de la proyección vertical medida desde la superficie libre equivalente.

Por tanto

$$\boxed{F_H = \gamma \bar{h} A_v}$$

(c) Fuerza de apoyo en C

Para una superficie curva:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

donde

$$F_V$$

es igual al peso del volumen imaginario de líquido situado sobre la superficie curva.

Luego, aplicando equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

se obtiene la reacción en el apoyo C:

$$\boxed{R_C = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}}$$

si el peso de la compuerta es despreciable.

Problema 4

Datos

$$D_{AB} = D_{BC} = 1\,m$$

$$D_C = D_D = 0{,}2\,m$$

$$\Delta z = 800\,m$$

$$g = 9{,}81\,m/s^2$$

Se desprecian pérdidas de carga.

(a) Velocidades de salida y caudal

Aplicando Bernoulli entre la superficie libre del embalse (A) y cualquiera de las salidas:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s$$

Como:

$$P_A = P_s = P_{atm}$$

$$V_A \approx 0$$

resulta:

$$z_A - z_s = \frac{V_s^2}{2g}$$

Por tanto:

$$V_s = \sqrt{2g(z_A - z_s)}$$

Si el desnivel efectivo es:

$$z_A - z_s = 800\,m$$

entonces:

$$V_s = \sqrt{2(9{,}81)(800)}$$

$$\boxed{V_s = 125{,}3\,m/s}$$

Como las salidas poseen igual diámetro:

$$V_C = V_D = 125{,}3\, m/s$$

El área de salida es

$$A_s = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$A_s = \frac{\pi (0{,}2)^2}{4}$$

$$A_s = 0{,}0314\, m^2$$

Caudal por cada salida:

$$Q_s = A_s V_s$$

$$Q_s = (0{,}0314)(125{,}3)$$

$$\boxed{Q_s = 3{,}93\, m^3/s}$$

Caudal total:

$$Q_T = 2Q_s$$

$$\boxed{Q_T = 7{,}86\, m^3/s}$$

Caudal en la tubería AB

Por continuidad:

$$Q_{AB} = Q_C + Q_D$$

$$\boxed{Q_{AB} = 7{,}86\, m^3/s}$$

La velocidad en AB será:

$$A_{AB} = \frac{\pi (1)^2}{4}$$

$$A_{AB} = 0{,}7854\, m^2$$

$$V_{AB} = \frac{Q_{AB}}{A_{AB}}$$

$$V_{AB} = \frac{7{,}86}{0{,}7854}$$

$$\boxed{V_{AB} = 10{,}0\, m/s}$$

(b) Presión manométrica en B

Aplicando Bernoulli entre A y B:

$$\frac{P_B}{\gamma} = z_A - z_B - \frac{V_B^2}{2g}$$

Por tanto:

$$\boxed{P_B = \rho g \left(z_A - z_B - \frac{V_B^2}{2g} \right)}$$

Sustituyendo los valores geométricos de la figura se obtiene la presión manométrica en B.

(c) Fuerza sobre el anclaje de la tobera

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\sum F_x = \dot{m}(V_{sal} - V_{ent})$$

donde

$$\dot{m} = \rho Q$$

La reacción del anclaje será:

$$\boxed{R = \rho Q (V_{sal} - V_{ent})}$$

considerando además la contribución de la presión en la sección de entrada.

(d) Efecto de las pérdidas por fricción

Si se consideran pérdidas:

$$h_f > 0$$

la ecuación de Bernoulli se transforma en

$$z_A = z_s + \frac{V_s^2}{2g} + h_f$$

por lo que:

$$V_s = \sqrt{2g(z_A - z_s - h_f)}$$

En consecuencia:

- Disminuyen las velocidades de salida.
- Disminuye el caudal.
- Disminuye la potencia disponible para la turbina.
- Disminuyen las fuerzas sobre los anclajes.